



مجتمع آموزش عالی گناباد

Fluid Mechanics

Dr. Vahid Mahmoudi

Assistant Professor,
Department of Chemical Engineering,
University of Gonabad



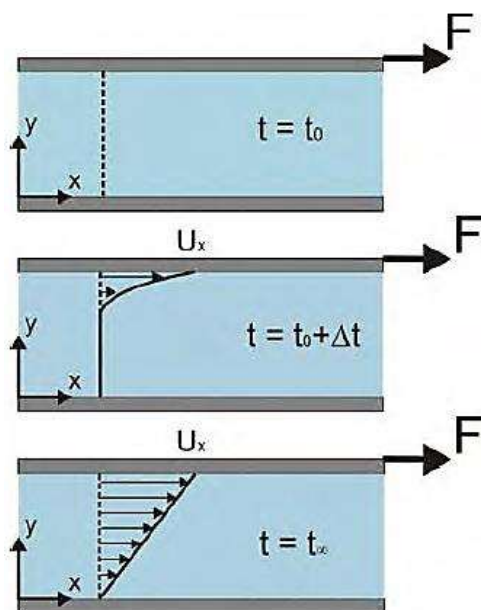
فهرست مطالب درس مکانیک سیالات

- فصل اول: تعریف و خواص سیال
- فصل دوم: استاتیک سیالات
- فصل سوم: دینامیک سیالات
- فصل چهارم: آنالیز ابعادی و تشابه

فصل اول: تعریف و خواص سیال

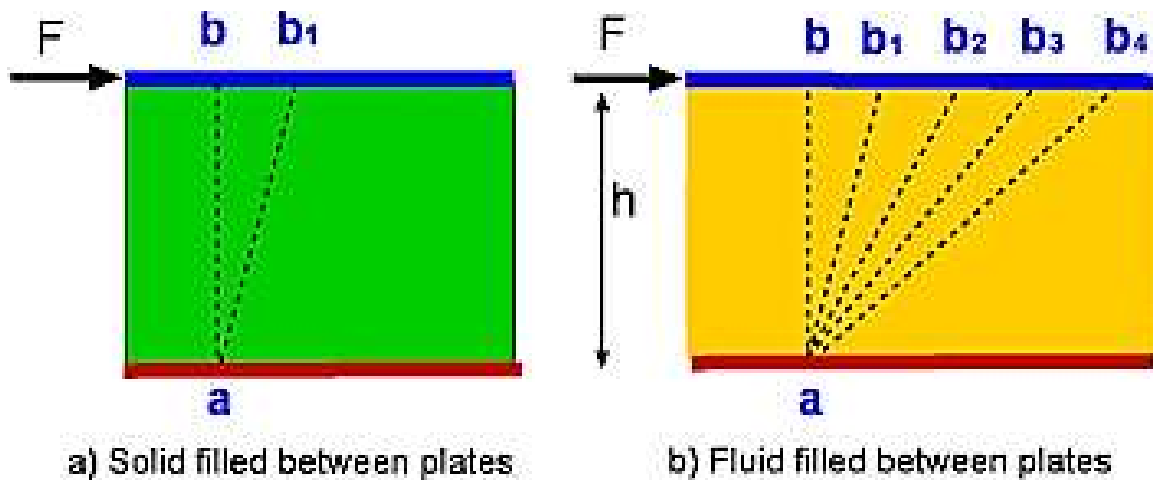
مکانیک سیالات در مهندسی شیمی
 دکتر وحید محمودی
 گروه مهندسی شیمی

تعریف سیال



- سیال ماده ای است که اگر تحت تاثیر یک نیروی برشی (هرچند ناچیز) قرار گیرد دچار تغییر شکل دائمی می شود.
- اگر یک جامد تحت تنش برشی قرار گیرد یا تغییر شکل نداده یا تغییر شکل آن دائمی نخواهد بود. مانند چوب یا میله فلزی
- سیال می تواند گاز یا مایع باشد.
- برخی از مواد نیز می توانند هم رفتار جامد و هم رفتار سیال داشته باشند. مانند شن های روان یا سقوط بهمن

در هنگام اعمال تنش، چه اتفاقی برای جامد و سیال می افتد؟



5

آحاد و ابعاد مهم در مکانیک سیالات

■ ابعاد اصلی عبارتند از:

○ طول (L)

○ زمان (T)

○ جرم (M)

○ دما (θ)

■ برای هر عبارت تساوی $A=B$ ، واحدهای دو طرف هم باید باهم برابر باشند که به آن همگنی ابعادی (Dimensional Homogeneity) می گویند.

■ سوال: آیا همگنی ابعادی می تواند در مواردی صدق نکند؟؟؟

6

سیستم آحاد

British

- Foot (ft)
- Second (s)
- Pound (lb_m)
- Degree Rankine (°R)
related to Fahrenheit
(°F+459.67)

SI (Système International)

- Meter (m)
- Second (s)
- Kilogram (kg)
- Degree Kelvin (°K)
related to Celsius
(°C+273.15)

7

چرا آحاد و ابعاد مهم هستند؟

Metric mishap caused loss of NASA orbiter

September 30, 1999

Share Mixx Twitter Email

Recommend 6 people recommend this.

CNN NASA lost a 125 million Mars orbiter because a Lockheed Martin engineering team used English units of measurement while the agency's team used the more conventional metric system for a key spacecraft operation, according to a review finding released Thursday.

The units mismatch prevented navigation information from transferring between the Mars Climate Orbiter spacecraft team in at Lockheed Martin in Denver and the flight team at NASA's Jet Propulsion Laboratory in Pasadena, California.



8

مسئله – یکسان بودن واحدها

▪ معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$F = K_a v t^{-1} + K_b l t^{-1} + K_c t^{-2}$$

▪ F – force, v – velocity, t – time, l – length

▪ واحد K_a ، K_b و K_c در سیستم SI را تعیین کنید.

9

برخی از پارامترهای مهم سیال

▪ دانسیته (ρ) با بُعد $[ML^{-3}]$

▪ دانسیته با تغییر دما و فشار تغییر می کند. البته مایعات تقریباً تراکم ناپذیر در نظر گرفته می شوند. اما تغییر دانسیته گازها با دما و فشار از اهمیت زیادی برخوردار است.

▪ حجم مخصوص (V) معکوس دانسیته می باشد.

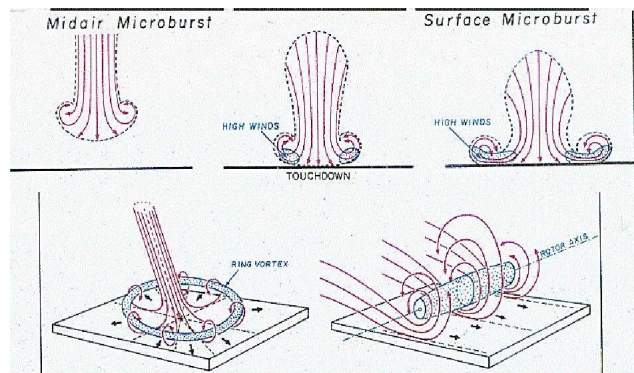
$$\gamma = \rho g$$

▪ جرم مخصوص سیال

▪ واحد جرم مخصوص؟؟؟

10

اثرات دانسیته (شناوری)



https://www.youtube.com/watch?v=AfueW-cp_s8

11

مسئله ای در مورد دانسیته

- محفظه ای با حجم 1 m^3 توسط دو سیال پر شده است. سیال اول دارای چگالی برابر با ۲ و چگالی سیال دوم برابر با 0.8 است. جرم سیال دوم ۳ برابر جرم سیال اول است.
- سوال ۱: جرم هر سیال درون محفظه چقدر است؟
- سوال ۲: هر سیال چه کسری از حجم کل را اشغال کرده است؟



12

گاز ایده آل

- گازها تراکم پذیری بیشتری از مایعات دارند و دانسیته آن ها به فشار و دما حساسیت بیشتری دارد. رفتار یک گاز ایده آل از قانون گاز کامل پیروی می کند:

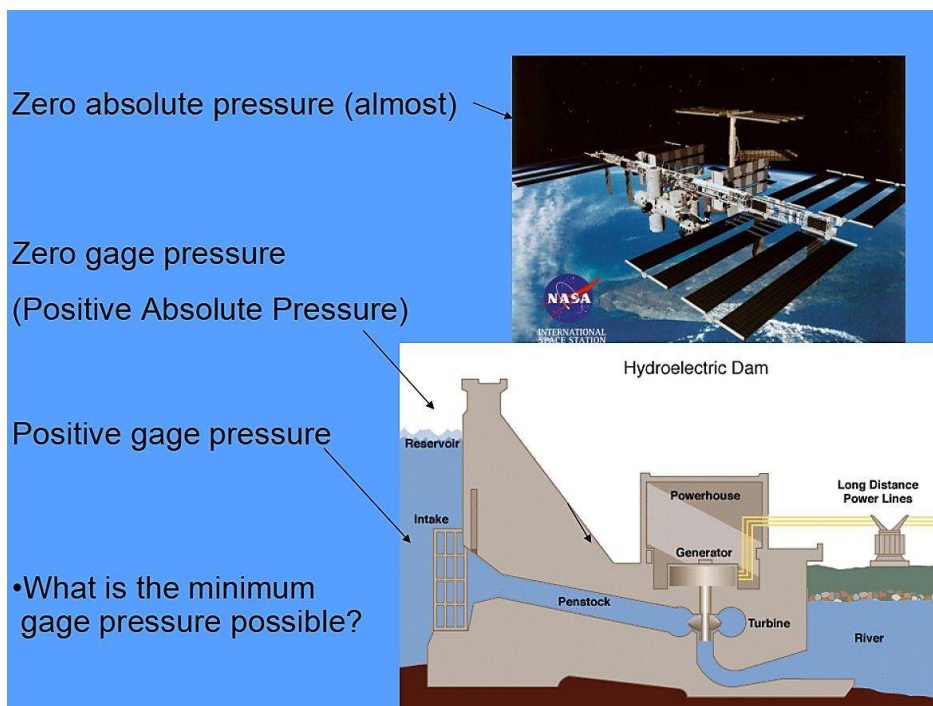
$$\rho = \frac{P}{RT}$$

- <https://ch301.cm.utexas.edu/simulations/js/idealgaslaw/>

- فشار یک پارامتر نسبی بوده و مقدار آن در علوم مهندسی به دو صورت فشار مطلق و نسبی بیان می شود. در معادله حالت گاز ایده آل، مقدار فشار باید به صورت مطلق قرار داده شود.
- فشار مطلق در مقایسه با فشار صفر مطلق (خلأ کامل) بیان می شود.
- فشار نسبی در مقایسه با فشار اتمسفر بیان می شود.

13

فشار مطلق و نسبی



14

مسئله – گاز ایده آل

- آزمایشی در دمای ۲۷ درجه سانتیگراد و فشار ۱۴ psia انجام می گیرد. دانسیته هوا در این شرایط چقدر می باشد؟
- پاسخ خود را با واحد های slug/ft³ و kg/m³ بیان کنید.
- اگر آزمایش را در ارتفاع ۳۰۰۰ ft از سطح زمین انجام دهیم چه اتفاقی می افتد؟ دما و فشار در آن ارتفاع چقدر هستند؟ دانسیته هوا در آن ارتفاع چه مقدار است؟

15

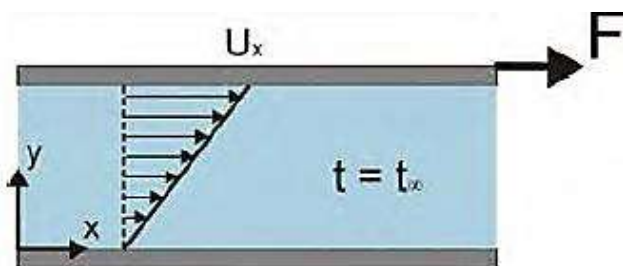
ویسکوزیته (لزجت)

- ویسکوزیته یا لزجت عامل خاصیت مقاومت سیال در برابر نیروها و تنش های برشی (عوامل حرکتی) می باشد. سیالی که لزجت بیشتری داشته باشد در برابر عامل حرکت مقاومت بیشتری می کند.
- ویسکوزیته خاصیت ذاتی هر سیال بوده و با تغییر دما تحت تاثیر قرار می گیرد.
- ویسکوزیته منجر به چسبیدن سیالات به مرزهای جامد می شود.
- مشاهدات نشان می دهند که تنش برشی با گردایان سرعت سیال نسبت مستقیم دارد.

$$\frac{F}{A} = \tau \propto \frac{du}{dy}$$

16

ویسکوزیته (لزجت)



$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} \propto \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{A} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

■ ویسکوزیته (دینامیکی) ثابت این تناسب می باشد.

■ ویسکوزیته سینماتیکی هم ممکن است در روابط به کار گرفته شود که عبارتست از:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

17

واحد ویسکوزیته

■ در سیستم SI

$$\frac{F}{A} = \tau = -\mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \left[\frac{N}{m^2} \right] = [\mu] \left[\frac{m/s}{m} \right]$$

$$\mu = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s = \frac{kg}{m \cdot s}$$

■ در سیستم cgs

$$\mu = poise (p) = 0.1 \frac{kg}{m \cdot s} = 100 cp$$

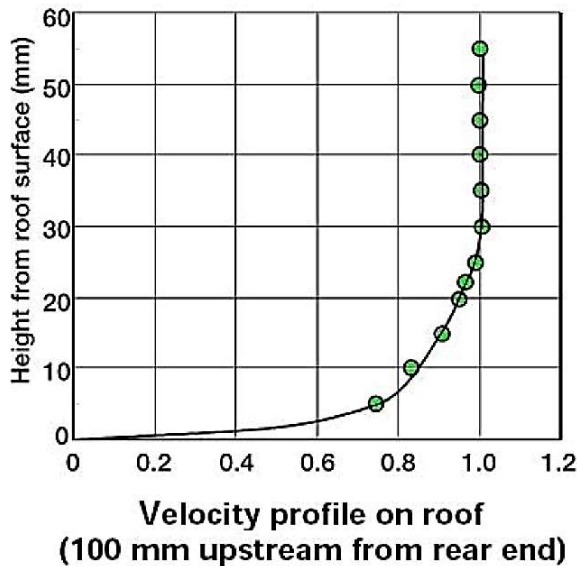
$$\Rightarrow 1 cp = 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$$

■ در سیستم انگلیسی

$$\mu = \frac{lb_m}{ft \cdot s}$$

18

پروفیل سرعت هوا بر روی سقف یک خودرو



در کدام ناحیه بیشترین تنش برشی وجود دارد؟

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

19

مسئله – تنش برشی ناشی از ویسکوزیته

- پروفیل تنش را برای آب در دمای 15.6°C در آزمایشگاه محاسبه کنید. در حالتی که معادله سرعت بر حسب y به شکل زیر باشد:

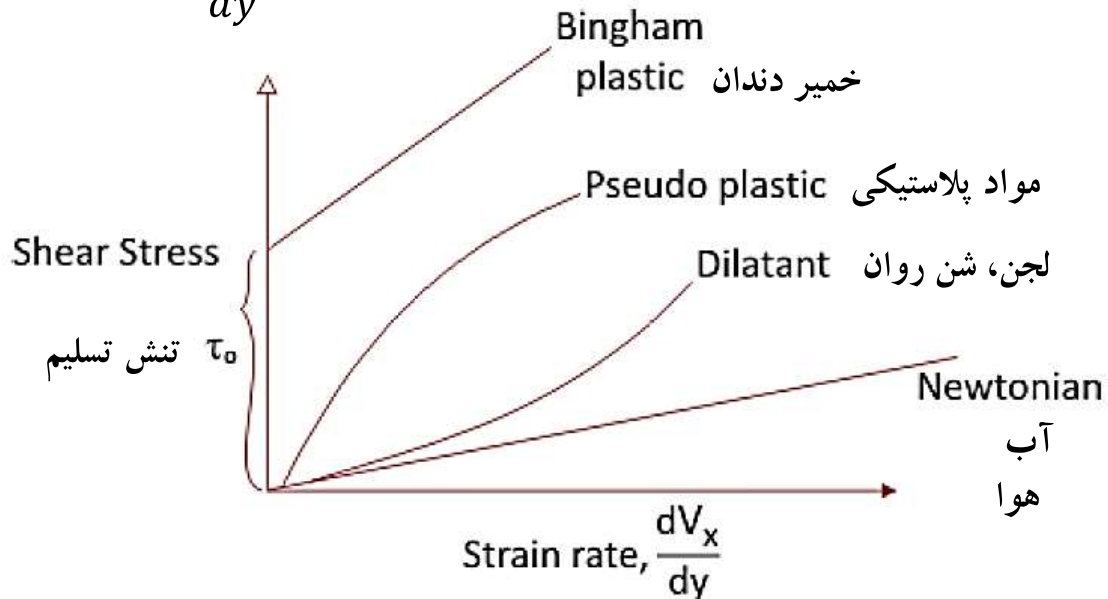
$$v(y) = -1.1y^3 + 12y^2 + 13.2y \quad 0 \leq y \leq 10$$

- رابطه ای برای تنش برشی به دست آورده و آن را رسم کنید.
- نقطه ماکزیمم آن کجا بوده و مقدار آن چقدر است؟
- نقطه مینیمم آن در چه محلی قرار داشته و مقدار آن چقدر است؟

20

سیالات غیرنیوتنی

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dV_x}{dy}$$



21

تراکم پذیری

- در اثر اعمال فشار مشخص بر روی یک سیال، میزان تغییر حجم آن چه قدر خواهد بود؟
- ضریب تراکم پذیری همدم

$$\beta = \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

- مدول بالک (ضریب کشسانی حجمی)

$$E_V = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$$

- تفاوت مقدار این پارامترها برای گازها و مایعات چقدر است؟؟؟



22

تراکم پذیری گازها

■ معمولاً دو دیدگاه به کار گرفته می شود:

■ تراکم همدم که برای یک گاز ایده آل معادله زیر به دست می آید:

$$\frac{P}{\rho} = \text{const}$$

■ تراکم ایزونتروپیک (عدم تغییر در انتروپی، بدون اصطکاک و تبادل گرما با محیط)

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{const}$$

برای بسیاری از گازها، ثابت $k = \frac{c_p}{c_v}$ در حدود 1.4 می باشد.

23

سرعت صوت

■ سرعت صوت چیست؟

➤ مقداری که نشان می دهد یک اغتشاش کوچک در یک سیال (مانند هوا یا آب) با چه سرعتی منتشر می شود.

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$

برای سرعت صوت در یک مایع
نسبت به گاز چه می توان گفت؟؟؟

24

سرعت صوت



▪ سرعت صوت در محیط های متفاوت چقدر است و به چه پارامترهایی بستگی دارد؟

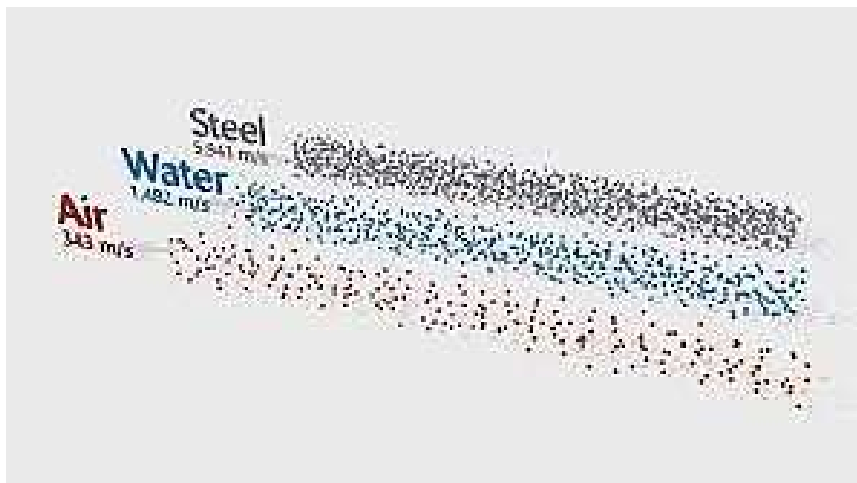
▪ <https://www.youtube.com/watch?v=OEmiTYtW5cs>

▪ <https://www.youtube.com/watch?v=PQydRIxoAU0>

مسئله – سرعت صوت در آب و هوا

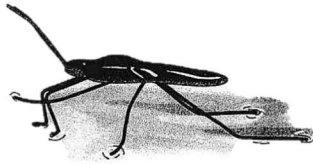
▪ فکر می کنید کدامیک بیشتر باشد؟

▪ مقدار سرعت صوت را در فولاد، آب و هوا محاسبه کنید...



کشش سطحی

- کشش سطحی سیال خاصیتی است که در سطح مشترک بین سیالات متفاوت اهمیت می یابد.
- دینامیک مولکولی متفاوت در هر طرف سطح مشترک، منجر به وجود کشش سطحی می شود.
- چگونه حشرات بر روی آب باقی می مانند؟ چگونه قطرات تشکیل یک شکل خاص را بر روی سطح می دهند؟
- کشش سطحی به ترکیب شیمیایی سیال حساس است و با حل کردن یک ماده در سیال می توان کشش سطحی آن را تغییر داد.

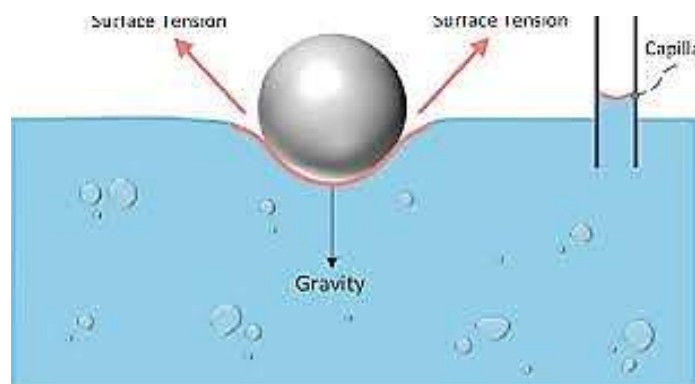
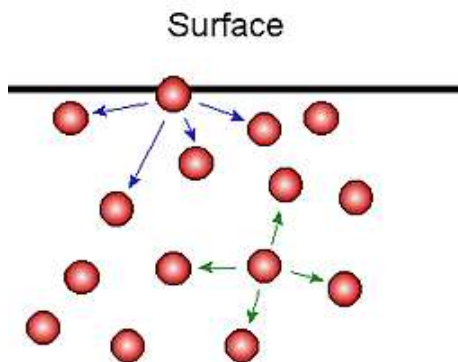


27

کشش سطحی

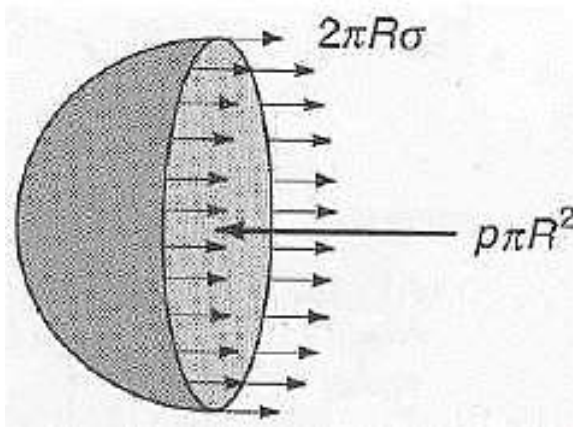
- ضریب کشش سطحی (σ)

$$\sigma = \frac{N \cdot m}{m^2} = \frac{N}{m}$$



28

رابطه فشار درون یک قطره با کشش سطحی

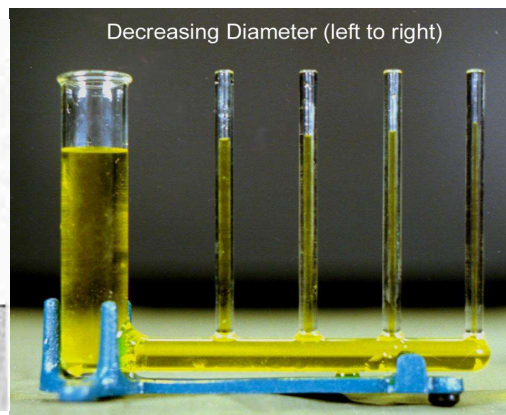
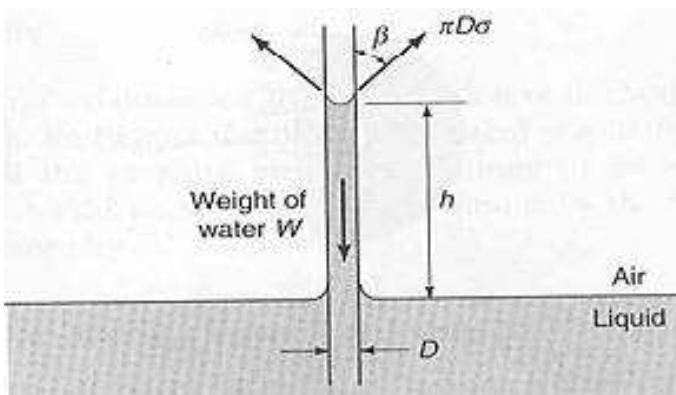


$$p\pi R^2 = \sigma \cdot 2\pi R$$

$$\Rightarrow p =$$

29

مونینگی



$$\sigma \pi D \cos \beta = \rho g \frac{\pi D^2}{4} h \Rightarrow h =$$

30

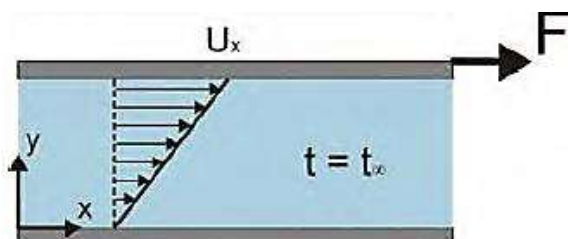
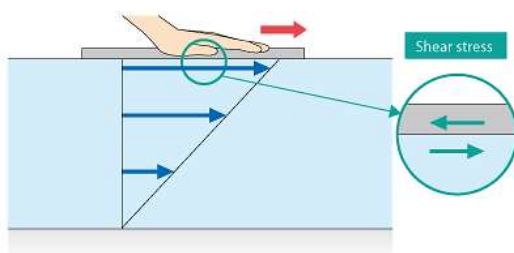
جلسات حل تمرین (فصل اول)

مکانیک سیالات در مهندسی شیمی
 دکتر وحید محمودی



یادآوری

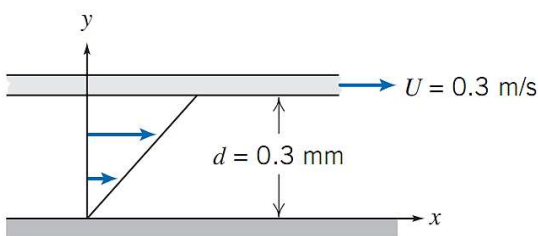
در تعریف سیال دیدیم



$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} \propto \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{F}{A} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$$

مثال

در شکل مقابل، صفحه بالایی در حال حرکت می باشد. ویسکوزیته مایع برابر با 0.65 cp و چگالی آن برابر با 0.88 است. با در نظر گرفتن توزیع سرعت خطی در سیال مطلوبست:



الف: ویسکوزیته دینامیک مایع بر حسب $\frac{\text{lb}_m}{\text{ft} \cdot \text{s}}$ و $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

ب: ویسکوزیته سینماتیک بر حسب $\frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^2}$

ج: تنش برشی بر روی صفحه بالایی بر حسب Pa

د: تنش برشی بر روی صفحه پایینی بر حسب Pa

ه: جهت تنش های برشی محاسبه شده در بخش های قبل

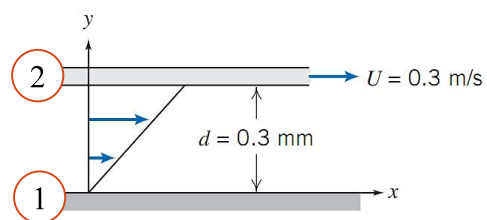
حل الف:

33

حل

ب:

ج:



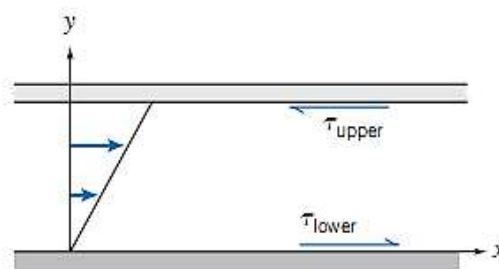
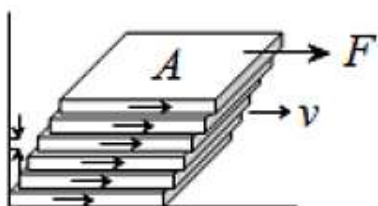
34

حل

در نتیجه

د:

ه:



35

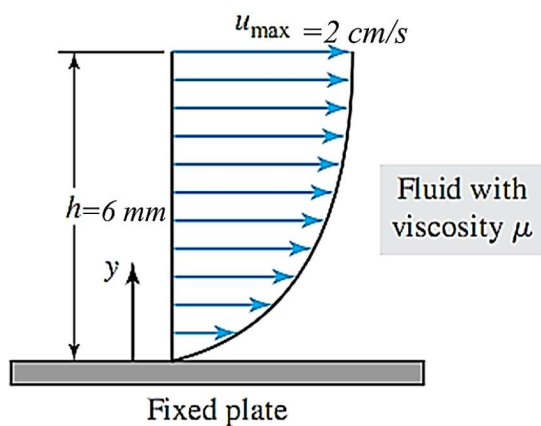
مثال

مطابق شکل، جریان آرام سیال بر روی یک صفحه ثابت نشان داده شده است. توزیع سرعت

برای $y \leq h$ به صورت $\frac{u}{u_{\max}} = 1.5 \left(\frac{y}{h} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{h} \right)^3$ می باشد. سیال گلیسرین با ویسکوزیته دینامیک 1500 cp است.

مطلوبست تعیین تنش برشی بر روی صفحه ثابت.

حل:



36

حل

در نتیجه:

از طرفی

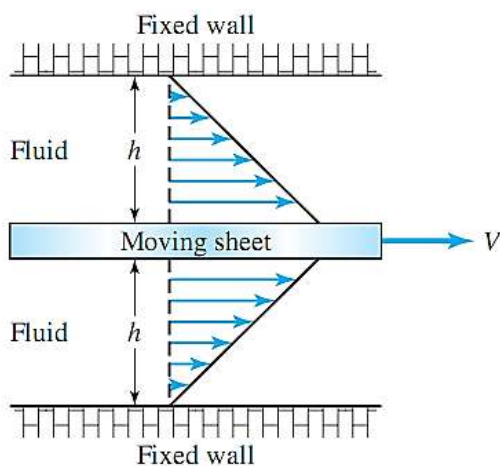
پس می توان نوشت

سوال: جهت نیروی برشی وارد بر صفحه ثابت؟؟؟

37

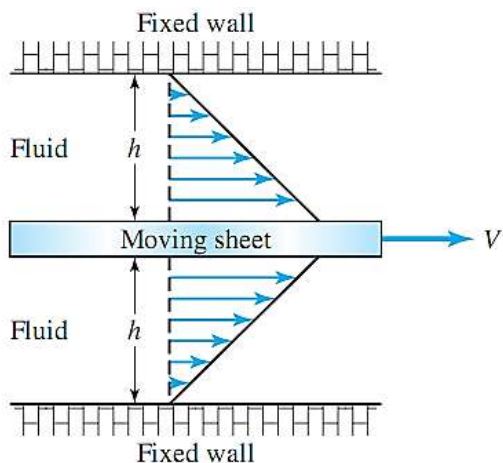
مثال

از دستگاه زیر برای پوشش دادن لایه نازکی از روغن بر روی فولاد استفاده می شود. ویسکوزیته روغن برابر با 20 cp و h برابر با 4 mm می باشد. ناحیه تماس بین روغن و ناحیه فولادی برابر با 10 m^2 است. نیروی لازم برای کشیدن صفحه فولادی با سرعت 5 m/s را تعیین کنید.



حل:

38



فصل دوم: استاتیکی سیالات

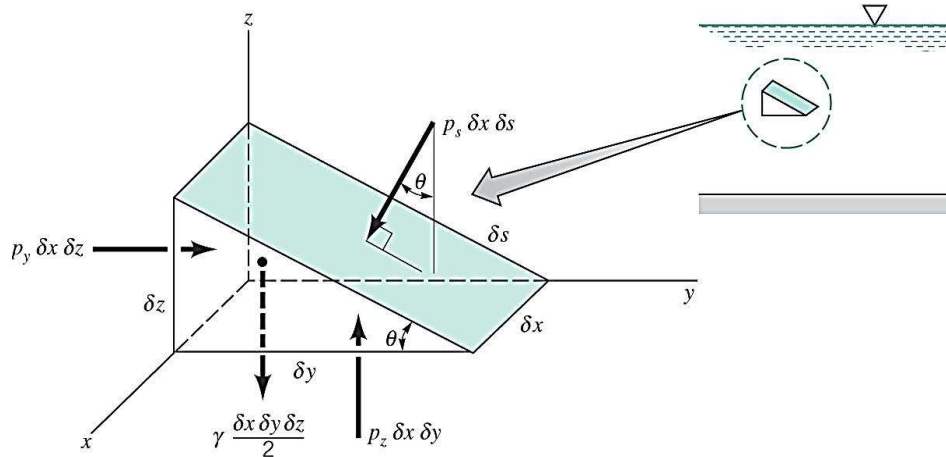
مکانیک سیالات در مهندسی شیمی

دکتر وحید محمودی

گروه مهندسی شیمی

فشار در یک نقطه از سیال

- با استفاده از قانون دوم نیوتن می توان اثبات کرد که فشار در یک نقطه از سیال ساکن در تمام جهات یکسان است.

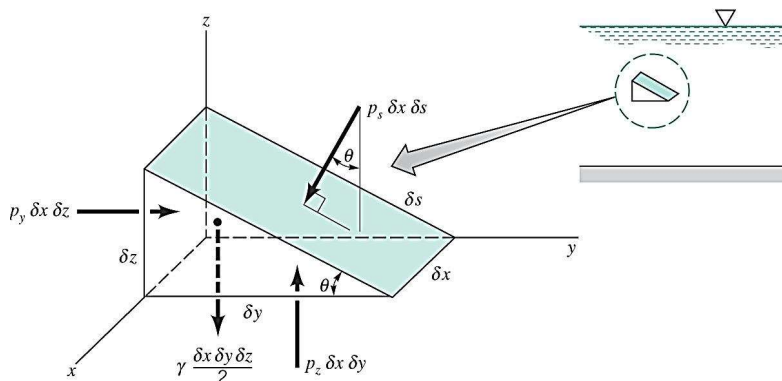


41

فشار در یک نقطه از سیال

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow p_y \delta_x \delta_z = p_s \delta_x \delta_s \sin(\theta) = p_s \delta_x \delta_z$$

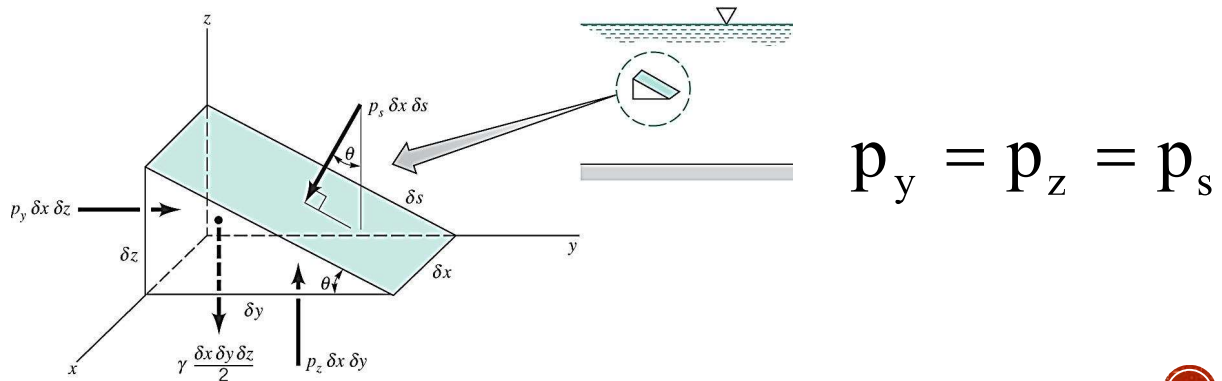
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow p_z \delta_x \delta_y = p_s \delta_x \delta_s \cos(\theta) = p_s \delta_x \delta_y$$



42

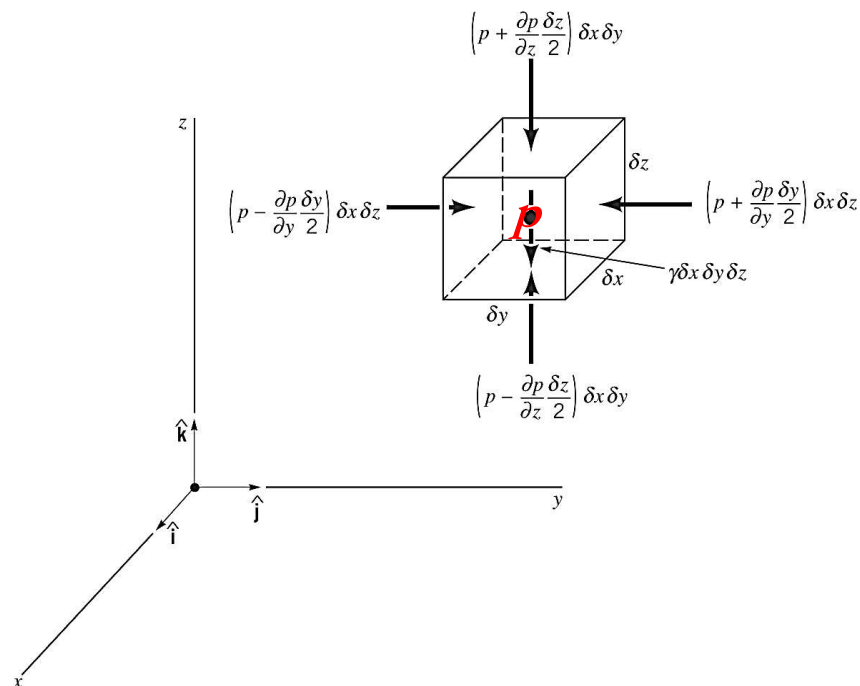
فشار در یک نقطه از سیال

■ نتیجه: در حالتی که هیچ تنش برشی وجود نداشته باشد، فشار در یک نقطه از سیال ساکن در تمام جهات یکسان است.



43

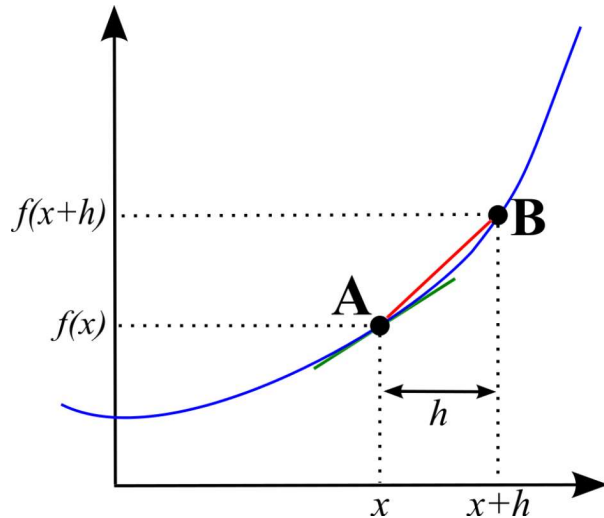
معادله اساسی فشار در سیال ساکن



44

معادله اساسی فشار در سیال ساکن

■ از روی تعریف مشتق:



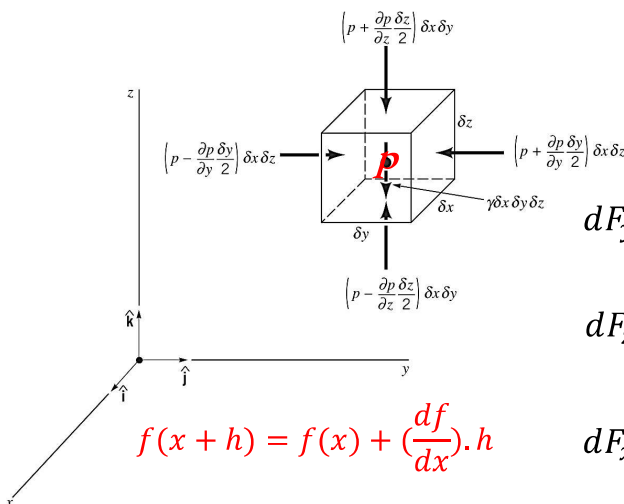
$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot h$$

45

معادله اساسی فشار در سیال ساکن



$$dF_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) \delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) \delta x \delta z$$

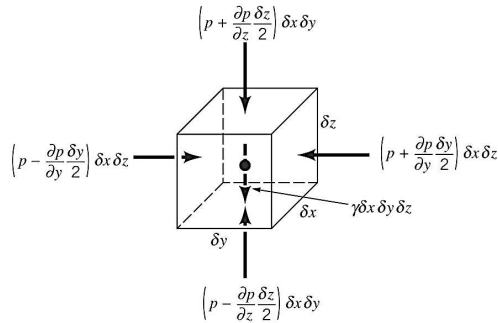
$$dF_z = \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\delta z}{2}\right) \delta x \delta y - \gamma \delta x \delta y \delta z$$

$$f(x+h) = f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot h$$

$$dF_x = ???$$

46

معادله اساسی فشار در سیال ساکن

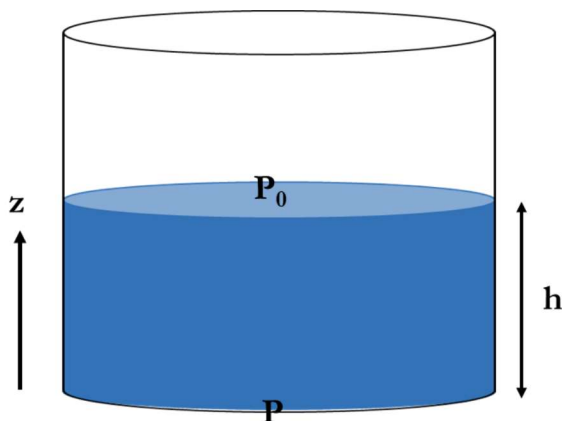


$$d\vec{F} = dF_x\vec{i} + dF_y\vec{j} + dF_z\vec{k} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g = -\gamma \end{cases}$$

47

سیال تراکم ناپذیر

■ در این حالت، $\gamma = \text{cte}$ (ثابت) است.



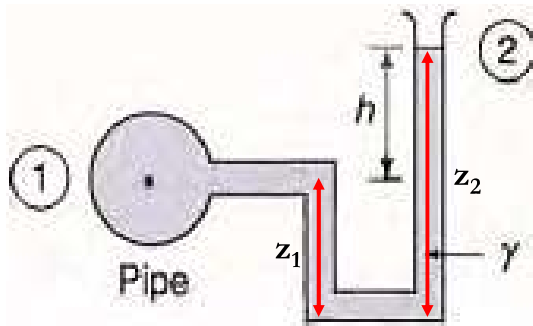
$$dP = -\gamma dz \Rightarrow \int_P^{P_0} dP = -\gamma \int_0^h dz$$

$$\Rightarrow P = P_0 + \gamma h$$

48

ابزار اندازه گیری فشار

■ مانومتر دستگاهی است که از طریق ارتفاع مایع، فشار را اندازه می گیرد.



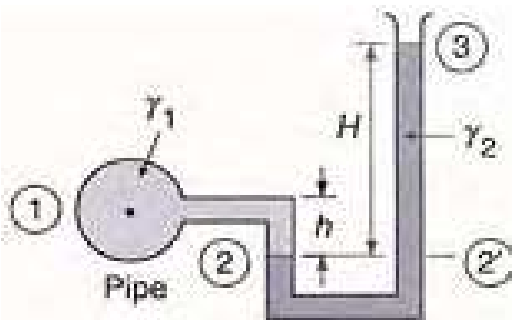
$$\begin{aligned} p_1 + \gamma z_1 &= p_2 + \gamma z_2 \\ \Rightarrow p_1 - p_2 &= \gamma(z_2 - z_1) \\ \Rightarrow \Delta p &= \gamma h \end{aligned}$$

49

ابزار اندازه گیری فشار

■ وقتی اختلاف فشار زیاد باشد بهتر است از یک مایع با چگالی بالا استفاده شود.

■ مانند؟؟؟



$$p_1 - p_2 = \gamma_1(z_2 - z_1)$$

$$p_2 - p_3 = \gamma_2(z_3 - z_2)$$

$$\Rightarrow p_1 - p_3 = \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2(z_3 - z_2)$$

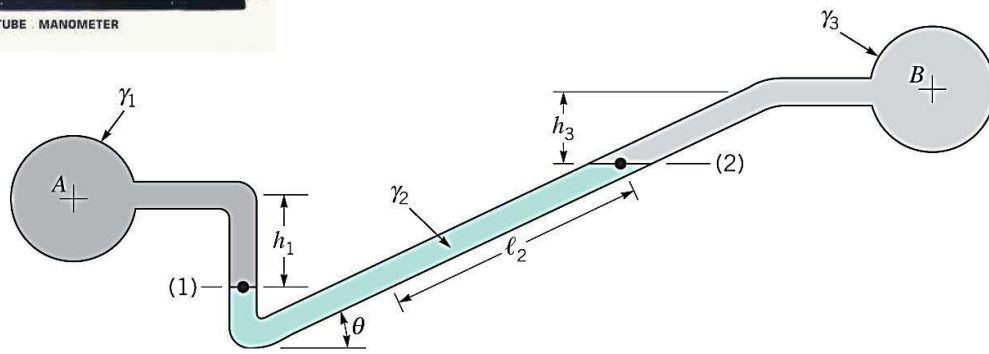
$$\Rightarrow p_1 - p_3 = -\gamma_1 h + \gamma_2 H$$

50

ابزار اندازه گیری فشار



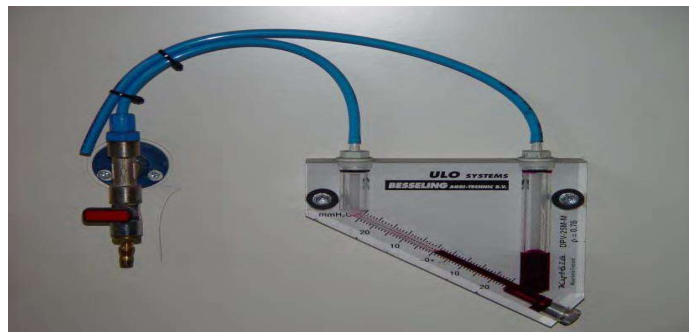
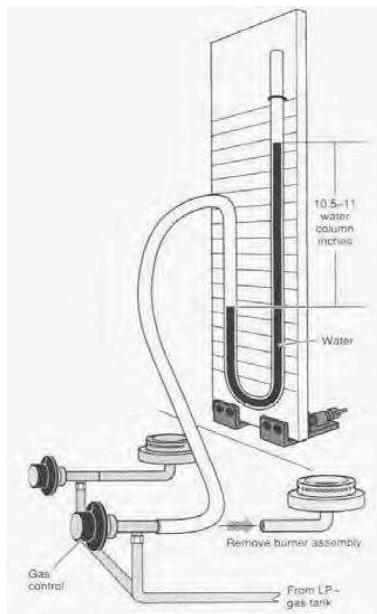
■ در حالتی که اختلاف فشار کم باشد



$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 \ell_2 \sin \theta - \gamma_3 h_3 = p_B$$

51

ابزار اندازه گیری فشار

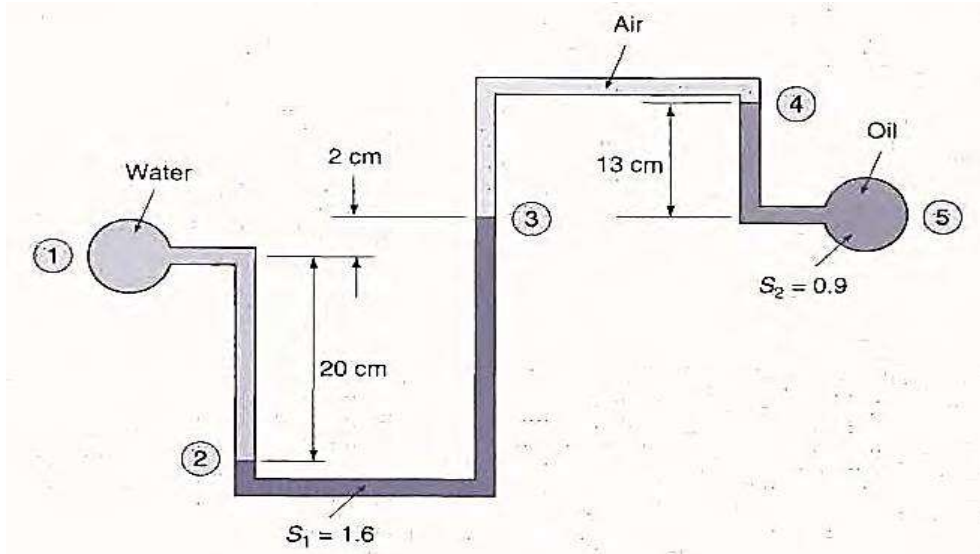


(a)

52

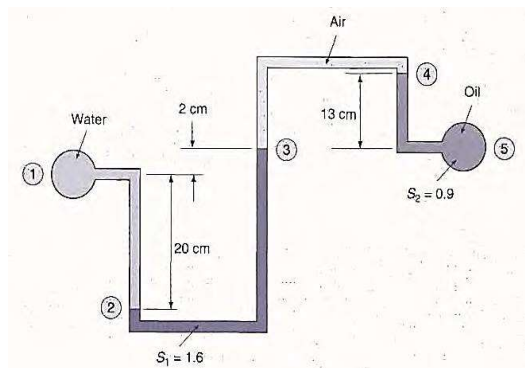
مثال

■ مطلوبست محاسبه اختلاف فشار مخزن ۱ و مخزن ۵



53

روش حل



$$\begin{aligned}
 p_1 - p_5 &= (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) \\
 &\quad + (p_3 - p_4) + (p_4 - p_5) \\
 &= \rho_w g(z_2 - z_1) + 1.6\rho_w g(z_3 - z_2) \\
 &\quad + 0 \times \rho_w g(z_4 - z_3) + 0.9\rho_w g(z_5 - z_4) \\
 &= 9810 \times (-0.2) + 1.6 \times 9810 \times 0.22 \\
 &\quad + 0.9 \times 9810 \times (-0.13) = 343 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

54

سیال تراکم پذیر

■ حالت اول: گاز ایده آل (هم دما)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \quad \rho = \frac{p}{RT} \Rightarrow \gamma = \frac{g}{RT}p$$

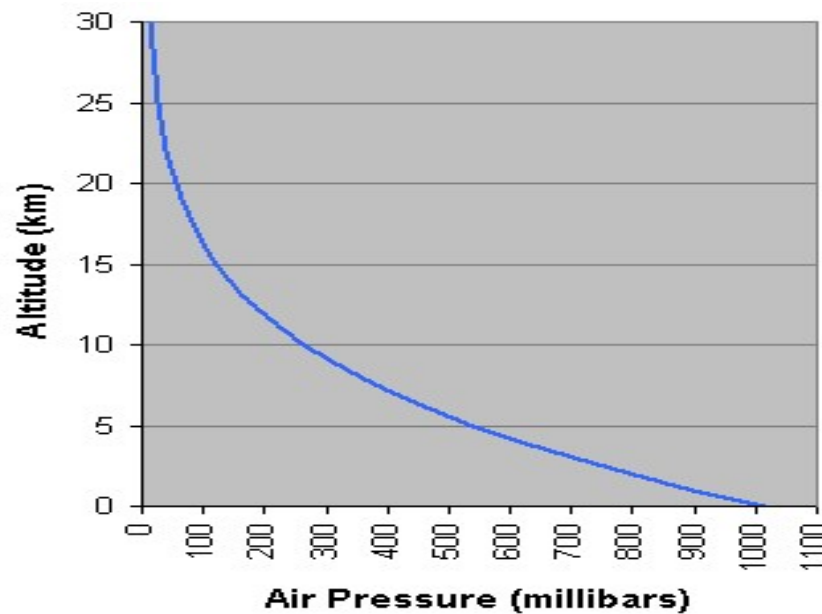
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{RT}p \Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{g}{RT}z}$$

■ حالت دوم: گاز ایده آل با دمای متغیر (خطی):

$$\left. \begin{array}{l} T = T_0 + \beta z \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \\ dz = \frac{dT}{\beta} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 + \beta z}{T_0} \right)^{\left(-\frac{g}{\beta R} \right)}$$

55

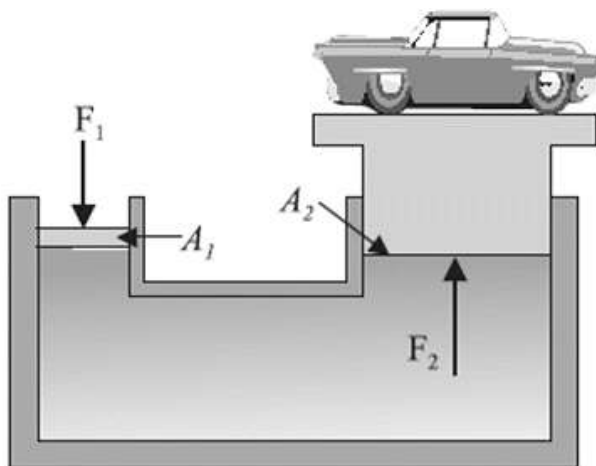
سیال تراکم پذیر



56

نیروهای سطحی در سیال محبوس و ساکن

■ اساس کار جک هیدرولیکی و ترمز خودرو



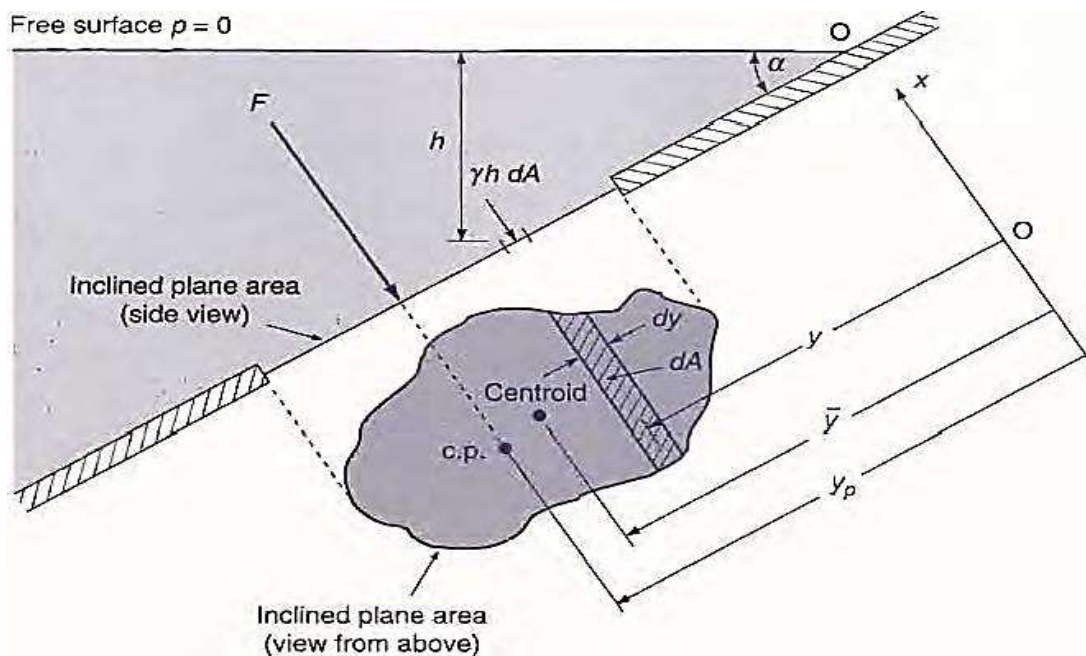
$$p_1 = p_2$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

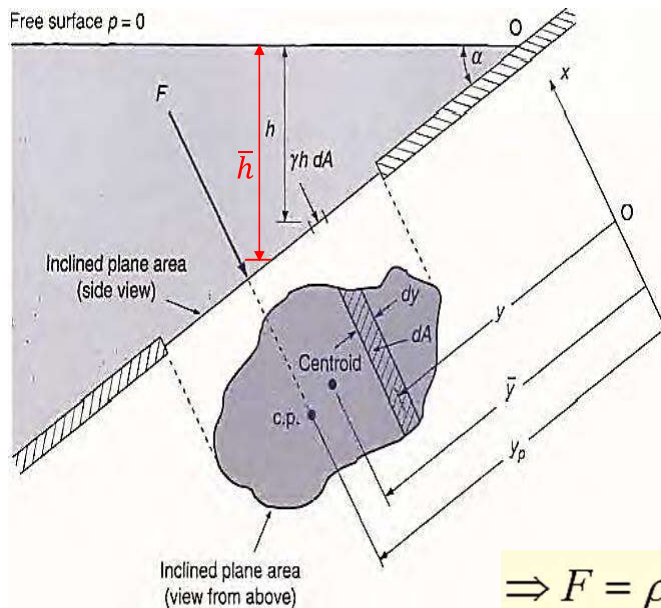
57

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح صاف در سیال



58

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح صاف در سیال



■ با توجه به شکل

$$F = \int_A P dA$$

$$P = \rho g h = \rho g y \sin \alpha$$

$$F = \rho g \sin \alpha \int_A y dA$$

مرکز سطح
(centroid): $\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA$

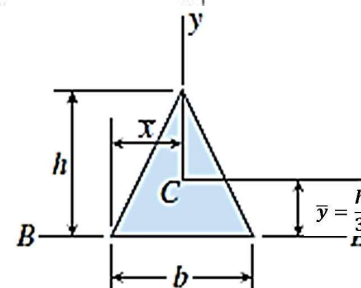
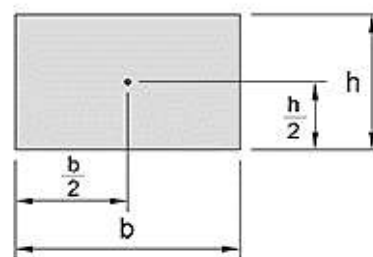
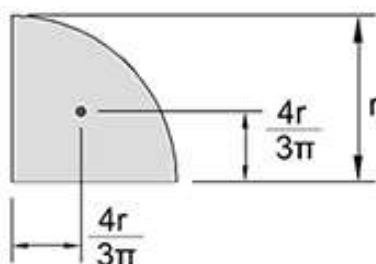
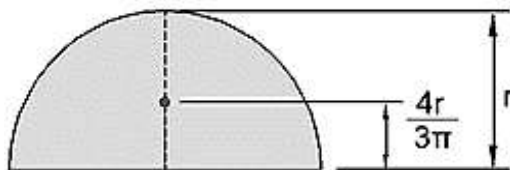
$$\Rightarrow F = \rho g \sin \alpha \cdot A \bar{y} = \rho g \bar{h} A = P_c A$$

59

مرکز سطح

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

برای سطوح مختلف



60

کاربرد

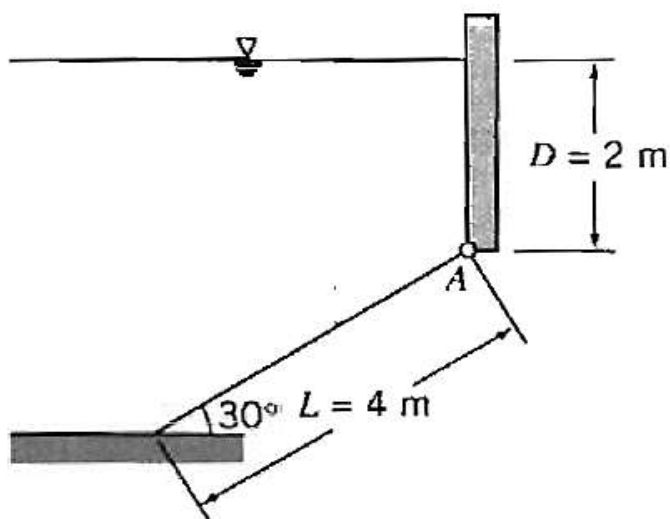
محاسبه نیروی وارد از سیال بر دریچه سد



61

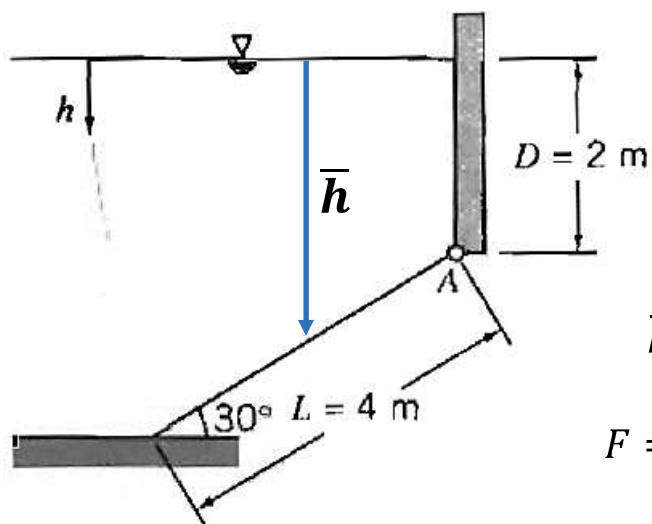
مثال

برآیند نیروهای ناشی از فشار هیدرواستاتیک بر روی سطح شیب دار (دریچه) در شکل زیر را به دست آورید. سیال آب بوده و دریچه مستطیلی با عرض ۵ متر می باشد.



62

حل



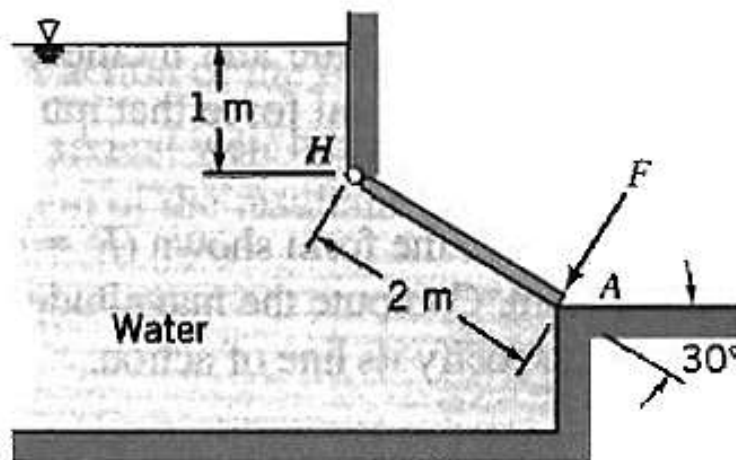
$$\bar{h} = 2 + \frac{L \times \sin 30^\circ}{2} = 3 \text{ m}$$

$$F = \gamma \bar{h} A = 9810 \times 3 \times (4 \times 5) = 588600 \text{ N}$$

63

مسئله

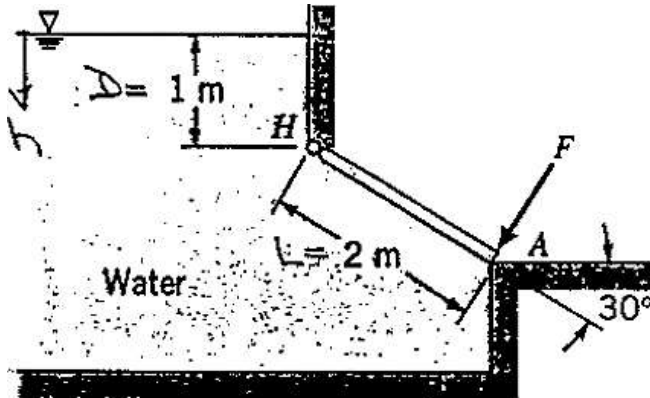
در شکل مقابل، نیروی F لازم برای نگه داشتن دریچه را به دست آورید. سیال آب بوده و دریچه به شکل مربع می باشد.



64

حل

$$\bar{h} =$$



65

مرکز فشار

محل اعمال نیرو را مرکز فشار می نامند.

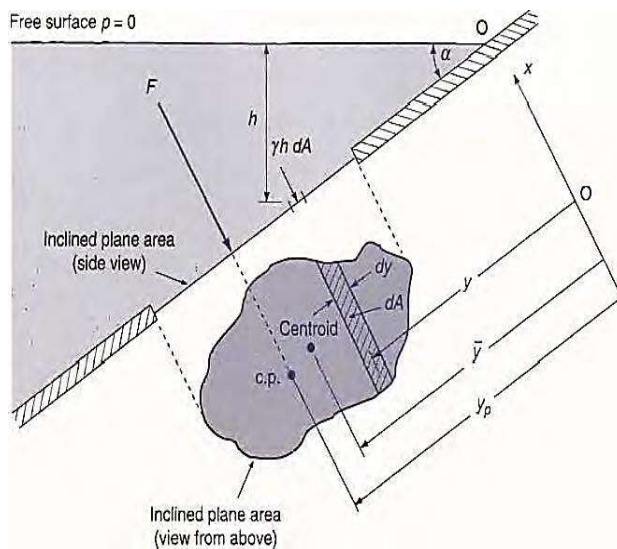
مختصات (x_p, y_p)

I_{xy} : حاصل ضرب اینرسی نسبت به دستگاه xy

$$x_p = \frac{1}{y_c \cdot A} \int_A x \cdot y \, dA$$

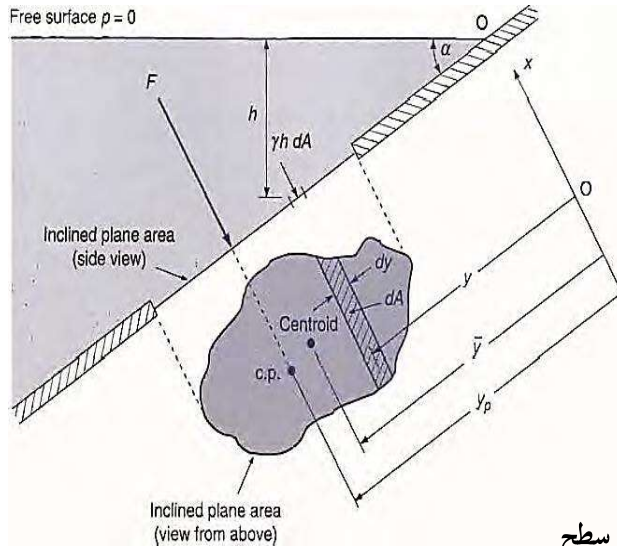
$$y_p = \frac{1}{y_c \cdot A} \int_A y^2 \, dA$$

I_{xx} : ممان دوم اینرسی سطح حول محور x



66

مرکز فشار



$$x_p = \frac{I_{xy}}{y_c \cdot A}$$

$$y_p = \frac{I_{xx}}{y_c \cdot A}$$

■ نسبت به محور عبوری از مرکز سطح

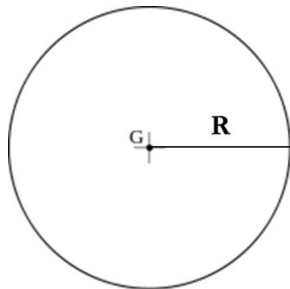
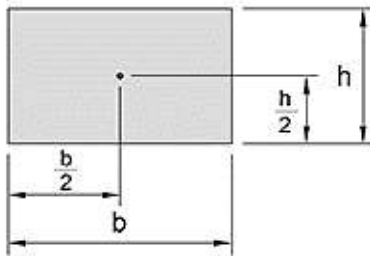
$$x_p = x_c + \frac{\bar{I}_{xy}}{y_c \cdot A}$$

$$y_p = y_c + \frac{\bar{I}_{xx}}{y_c \cdot A}$$

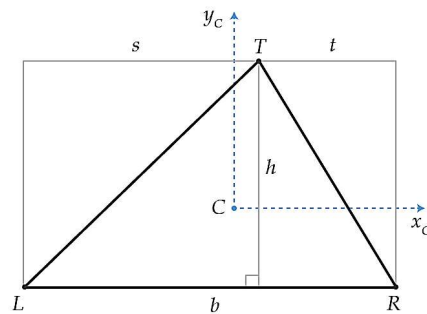
$\bar{I}_{xx}$ ممان دوم سطح حول محور عبوری از مرکز سطح
 $\bar{I}_{xy}$ حاصل ضرب اینرسی نسبت به محور عبوری از مرکز سطح

67

مرکز فشار



$$\bar{I}_{xx} = \frac{1}{12} b h^3 \quad ; \quad \bar{I}_{xy} = 0$$



$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi R^4}{4} \quad ; \quad \bar{I}_{xy} = 0$$

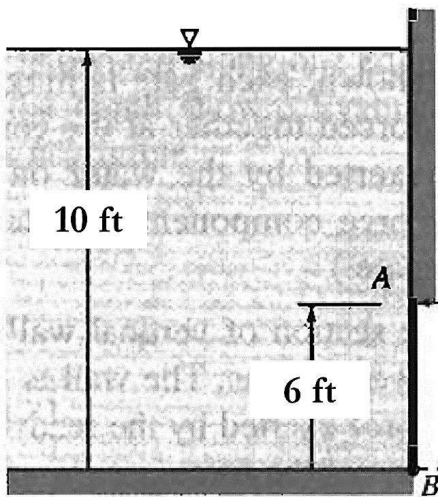
$$\bar{I}_{xx} = \frac{1}{36} b h^3$$

68

مثال

▪ دریچه AB به شکل مستطیل و عرض ۴ ft، می تواند حول نقطه A گردش کند. مقدار گشتاور حول نقطه A را به دست آورید. سیال آب است.

▪ حل: می دانیم $y_c = 7 \text{ ft}$



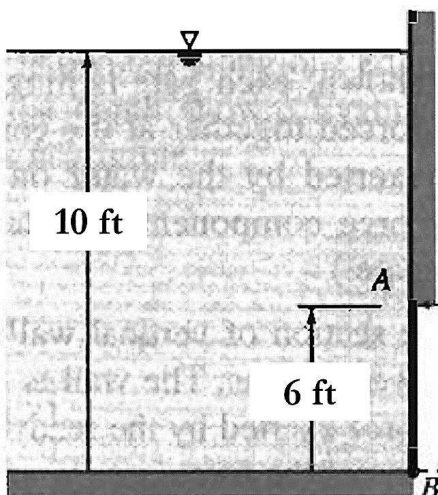
$$F = \gamma_w \cdot y_c \cdot A = 62.4 \times 7 \times (6 \times 4) = 10483.2 \text{ lb}_f$$

$$y_p = y_c + \frac{\bar{I}_{xx}}{y_c \cdot A} = 7 + \frac{\frac{1}{12} \times 4 \times 6^3}{7 \times (6 \times 4)} = 7.428 \text{ ft}$$

69

مثال

▪ دریچه AB به شکل مستطیل و عرض ۴ ft، می تواند حول نقطه A گردش کند. مقدار گشتاور حول نقطه A را به دست آورید. سیال آب است.



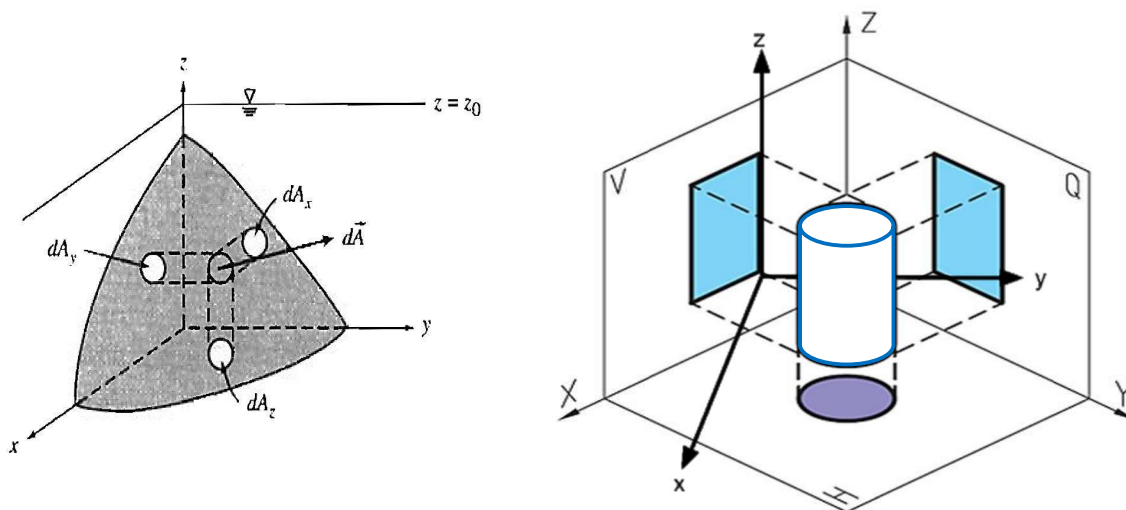
$$L_p = 7.428 - 4 = 3.428 \text{ ft}$$

$$\Rightarrow T = F \cdot L_p = 10483.2 \times 3.428 = 4486809.6 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}$$

70

نیروی وارد بر سطوح خمیده در سیال

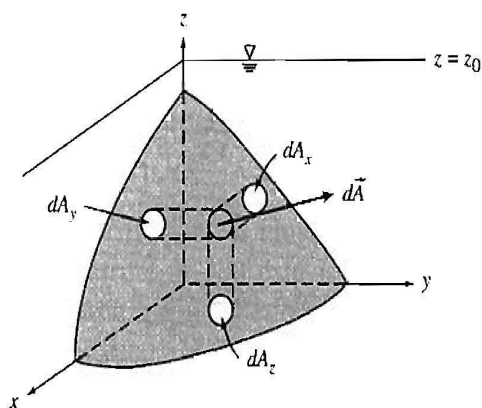
■ برای مثال، اگر یک استوانه (جسم سه بُعدی) را از سه نمای مختلف بر روی صفحات محور x-y-z تصویر کنیم:



71

نیروی وارد بر سطوح خمیده در سیال

■ با توجه به شکل



$$d\vec{A} = dA_x \vec{i} + dA_y \vec{j} + dA_z \vec{k}$$

$$dF = -pdA \Rightarrow F = - \int_A pdA$$

■ در جهت x و y

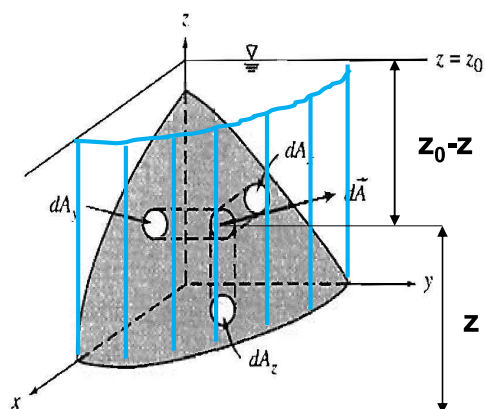
$$F_x = - \int_{A_x} pdA = -p_c \cdot A_x$$

$$F_y = - \int_{A_y} pdA = -p_c \cdot A_y$$

72

نیروی وارد بر سطوح خمیده در سیال

■ با توجه به شکل



$$dF_z = -p \cdot dA_z \Rightarrow F_z = - \int_{A_z} p dA_z$$

$$= - \left(\int_{A_z} \gamma (z_0 - z) dA_z \right) = - \int_V \gamma dV$$

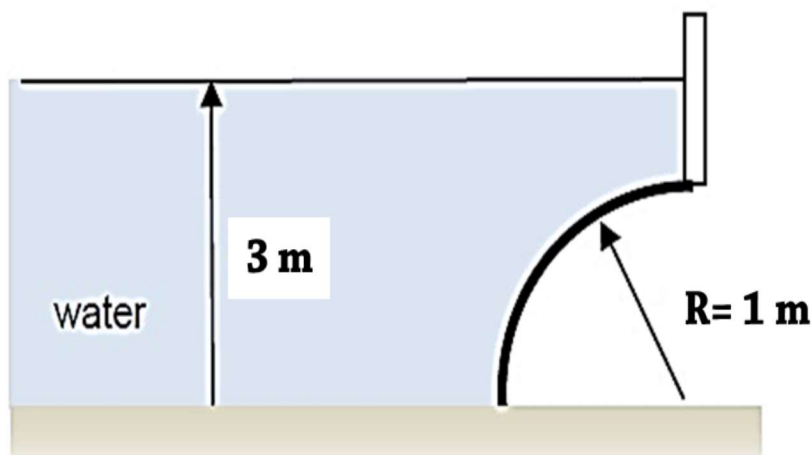
$$\Rightarrow F_z = -\gamma V$$

■ γV همان وزن سیال (فرضی) محصور شده بین سطح خمیده و سطح آزاد است.

73

مثال

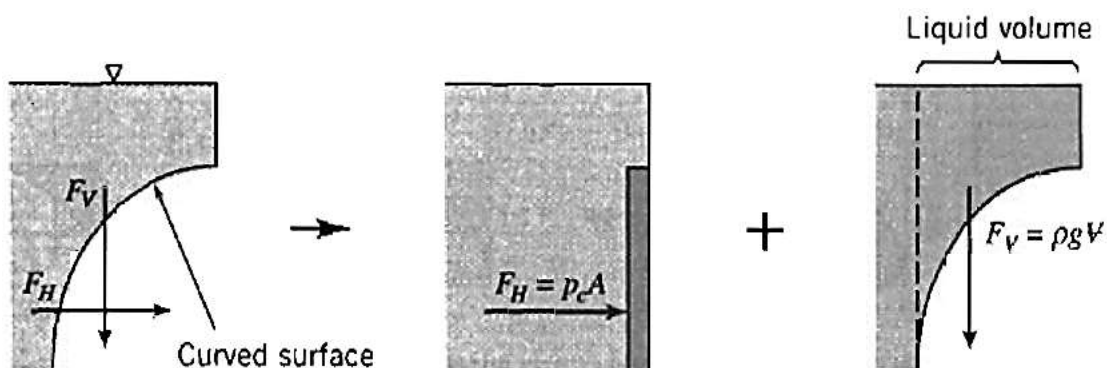
■ نیروهای افقی و قائم وارد بر دریچه ربع استوانه ای در شکل مقابل را بیابید.
عرض دریچه را ۲ متر در نظر بگیرید.



74

حل

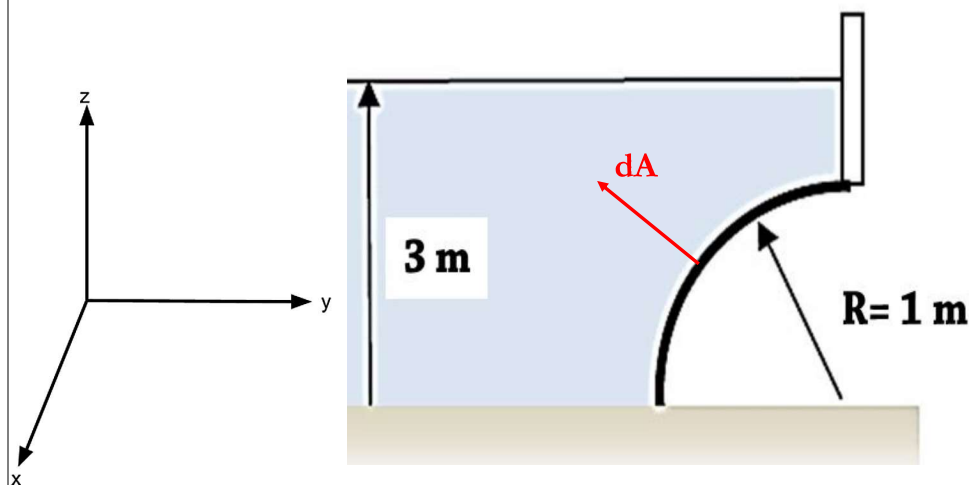
▪ نیروی هیدرواستاتیک بر روی سطح خمیده به دو مولفه نیروی موازی با سطح آزاد (F_H) و نیروی عمود بر سطح آزاد (F_V) تقسیم می شود.



75

حل

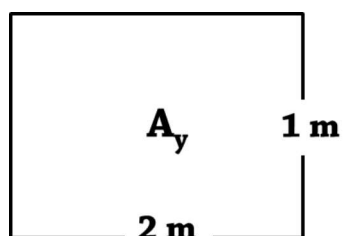
▪ نیروهای افقی و قائم وارد بر دریچه ربع استوانه ای در شکل مقابل را بیابید. عرض دریچه را ۲ متر در نظر بگیرید.



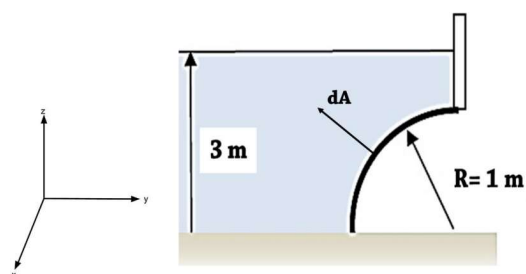
76

حل

■ ابتدا محاسبه F_H



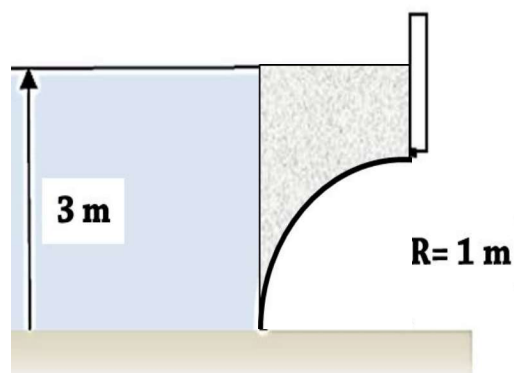
$$\begin{aligned} F_H &= -p_c \cdot A_y = -(\gamma \cdot h_c) \cdot A_y \\ &= -(9810 \times (2 + 0.5)) \times 2 \times 1 \\ &= -49.05 \times 10^3 \text{ N} = -49.05 \text{ kN} \end{aligned}$$



77

حل

■ حال محاسبه F_V



$$\begin{aligned} F_V &= -\gamma \cdot V \\ &= -9810 \left[(3 * 2 * 1) - \left(\frac{1}{4} \pi * 1^2 * 2 \right) \right] \\ \Rightarrow F_V &= -43.45 \text{ kN} \end{aligned}$$

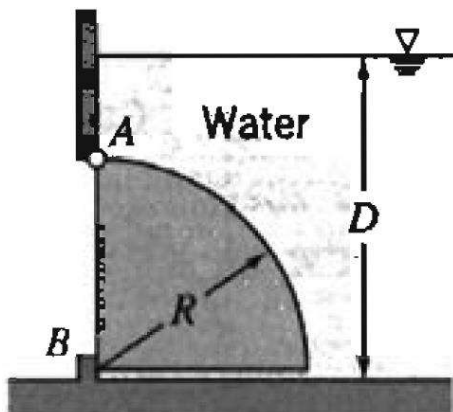
■ در نهایت

$$F =$$

78

تمرین

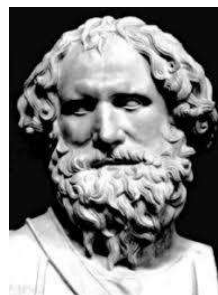
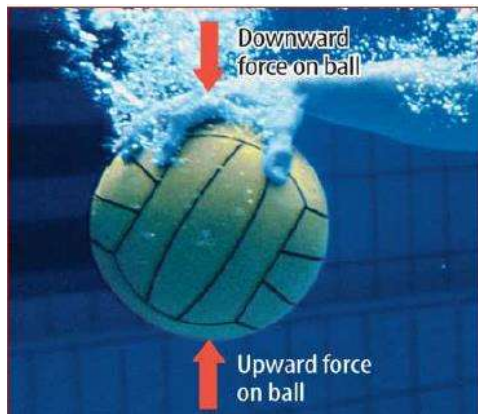
- دریچه ای به شکل یک ربع استوانه با عرض ۲ متر در مسیر آب قرار دارد. فاصله کف دریچه تا سطح آب ۳ متر است. نیروی کل وارد بر دریچه را به دست آورید. شعاع برابر با ۲ متر است.



79

شناوری (BUOYANCY)

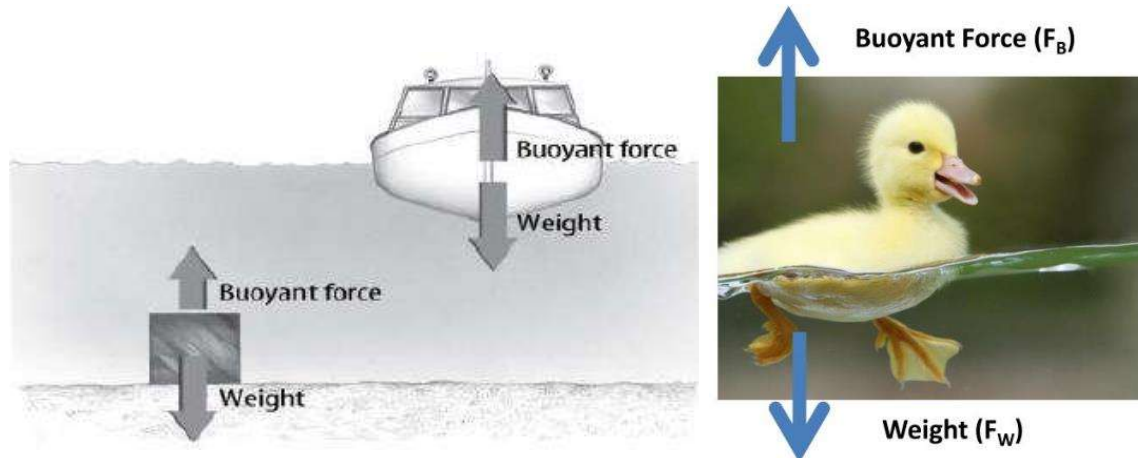
- هنگامی که جسمی در درون یک سیال فرو برده می شود، نیرویی در جهت بالا از سوی سیال به جسم وارد می شود.
- طبق اصل ارشمیدس، مقدار این نیرو (نیروی شناوری) برابر با وزن سیالی است که توسط جسم جایگزین شده است (حجمی از آب معادل با حجم توپ).
- پس نیروی شناوری نیرویی است که یک جسم از سیال اطراف خود دریافت می کند.



80

شناوری

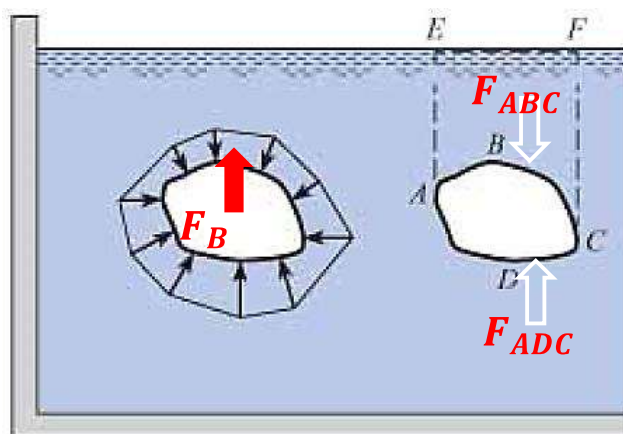
- وقتی جسمی بر روی آب قرار گیرد، آب نیرویی در خلاف جهت به جسم وارد می کند.
- اگر نیروی وارده از طرف آب، نیروی جسم (وزن) را خنثی کند، جسم شناور می شود. در غیر این صورت جسم در آب فرو می رود.



81

شناوری (BUOYANCY)

- یک جسم غوطه ور در سیال را در نظر بگیرید. نیروی شناوری همان برآیند نیروی عمودی وارد بر سطح بالایی (ABC) و سطح پایینی جسم (ADC) است.
- نیروی عمودی وارد بر هر سطح (خمیده) برابر است با وزن ($\gamma_f V$) سیال محبوس بین سطح خمیده و سطح آزاد سیال. پس:



$$F_B = F_{ADC} - F_{ABC}$$

$$F_{ADC} = \gamma_f V_{ADCFE}$$

$$F_{ABC} = \gamma_f V_{ABCFE}$$

$$\Rightarrow F_B = \gamma_f V_{ADCFE} - \gamma_f V_{ABCFE} \\ = \gamma_f (V_{ADCFE} - V_{ABCFE})$$

$$\Rightarrow F_B = \gamma_f V_{object}$$

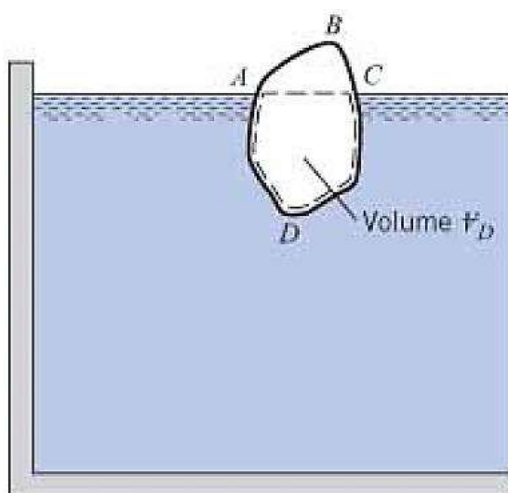
82

شناوری (BUOYANCY)

- می توان نشان داد که برای جسمی که بر روی سیال شناور است، رابطه زیر مقدار نیروی شناوری را تعیین می کند.

$$F_B = \gamma_f V_{ADC}$$

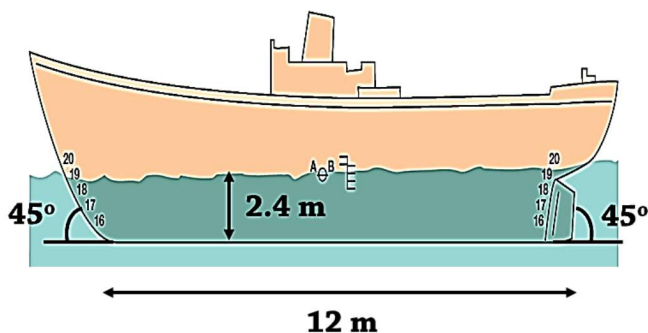
- که V_{ADC} همان حجمی از جسم است که وارد سیال شده است. (اثبات به عهده شما)



83

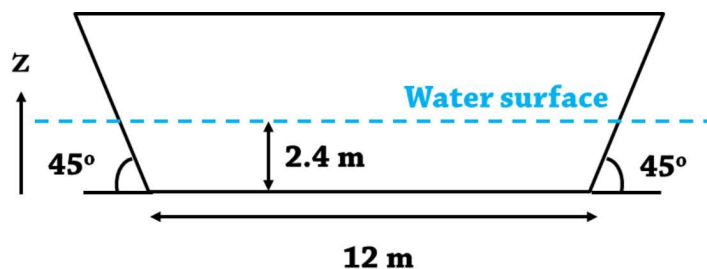
مثال

- در شکل مقابل، وزن کل کشتی باری و بار روی آن را به دست آورید. پهنای کشتی ۶ متر می باشد.



- حل: شکل زیر را معادل کشتی در نظر می گیریم.

- نیروی وارد از طرف کشتی بر آب، نیروی وزن و نیروی وارد از طرف آب، نیروی شناوری است.



$$\sum F_Z = F_B - W = 0 \Rightarrow W = F_B$$

84

حل

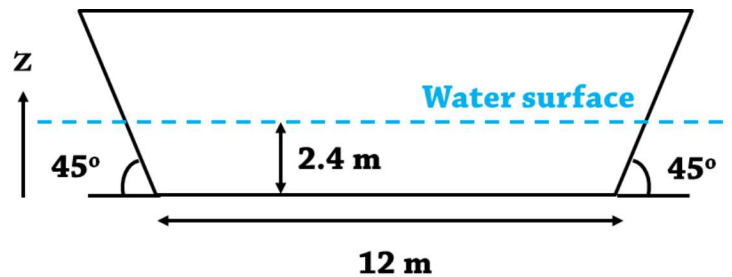
▪ Immersed به معنای «فرو رفته در آب»

▪ ω هم عرض کشتی که ۶ متر است.

$$F_B = \gamma_f V_{\text{immersed}}$$

$$V_{\text{immersed}} = S_{\text{immersed}} \cdot \omega$$

$$S_{\text{immersed}} =$$



85



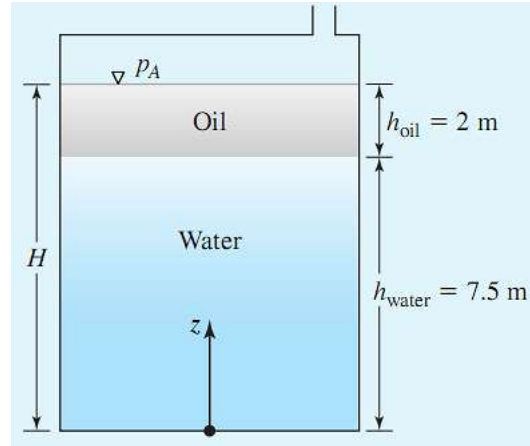
حل تمرین فصل دوم: استاتیک سیالات

مکانیک سیالات در مهندسی شیمی
دکتر وحید محمودی



مثال

A mixture of crude oil (SG = 0.87) and water is pumped into a settling tank that is 10 m high and vented at the top. After a period of time, it is found that a layer of crude oil 2 m deep has accumulated on top of 7.5 m of water. What is the average density of the liquid column? What is the pressure at the bottom of the tank?



87

حل

a) To determine the average density:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{H} \int_0^H \rho(z) dz = \frac{1}{H} \left[\left(\int_0^{h_{\text{water}}} \rho_{\text{water}} dz \right) + \left(\int_{h_{\text{water}}}^{h_{\text{water}} + h_{\text{oil}}} \rho_{\text{oil}} dz \right) \right]$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{H} [\rho_{\text{water}} h_{\text{water}} + \rho_{\text{oil}} h_{\text{oil}}] = \frac{\rho_{\text{water}}}{H} \left[h_{\text{water}} + \left(\frac{\rho_{\text{oil}}}{\rho_{\text{water}}} \right) h_{\text{oil}} \right]$$

$$\bar{\rho} = \frac{998 \text{ kg/m}^3}{9.5 \text{ m}} [7.5 \text{ m} + (0.87)(2 \text{ m})] = 971 \text{ kg/m}^3$$

b) The pressure at the bottom of the tank:

$$p_B = p_A + \bar{\rho} g H$$

$$\begin{aligned} p_B &= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + (971 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(9.5 \text{ m}) \frac{1 (\text{N-s}^2)}{1 (\text{kg-m})} \\ &= 1.92 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Also

$$\bar{\rho} g H = \rho_{\text{water}} g h_{\text{water}} + \rho_{\text{oil}} g h_{\text{oil}}$$

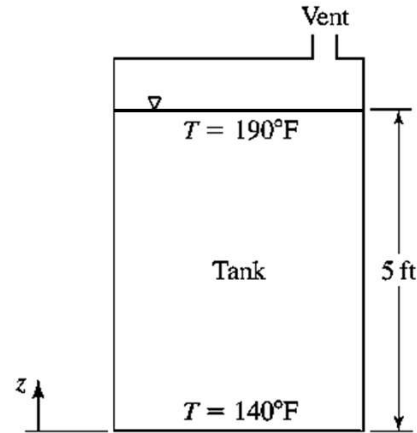
88

مثال

As shown below, the hot water tank is 50 °F hotter at the top than at the bottom. If the thermostat maintains the water at the bottom of the tank at 140 °F, and the tank is 5 ft tall and vented at the top, find the pressure distribution in the tank as a function of height. How much is the pressure at the bottom of the tank? Assume $\beta = 2.3 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$.

Assumption: **linear T distribution** in the Tank.

$$T_T = 190^\circ\text{F} \text{ and } T_B = 140^\circ\text{F}$$



89

حل

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p(z) - p_0 = \int_{z_0}^z -\rho(z)g dz$$

With a linear temperature distribution:

$$T(z) = \alpha + \omega z \Rightarrow T(z) = T_B + (T_T - T_B)(z/H)$$

Also, thermal expansion defines as below:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Rightarrow \rho(T) = \rho_B [1 - \beta(T - T_B)]$$

Finally,

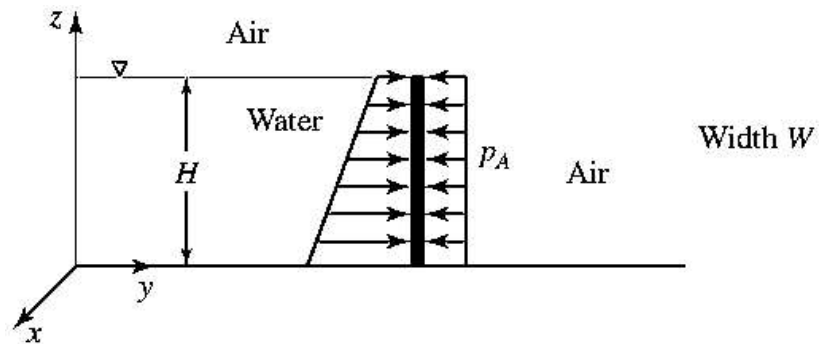
$$p(z) - p_A = \int_H^z -\rho_B \left[1 - \beta(T_T - T_B) \frac{z}{H} \right] g dz = \rho_B g \left[-z + \frac{z^2}{2H} \beta(T_T - T_B) \right] \Big|_H^z$$

$$\Rightarrow p(z) = p_A + \rho_B g (H - z) \left[1 - \frac{H + z}{2H} \beta(T_T - T_B) \right]$$

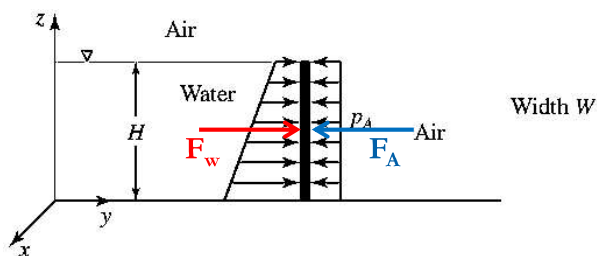
90

مثال

A vertical gate of width W controls the water level in the intake reservoir of a power plant. What is the force of the water on the gate? What is the net hydrostatic force on the gate?



91



$$F_w = (p_A + p_c) \cdot A$$

$$p_c = \gamma_w \cdot h_c$$

$$h_c = \quad \Rightarrow p_c = \quad \Rightarrow F_w =$$

And net F :

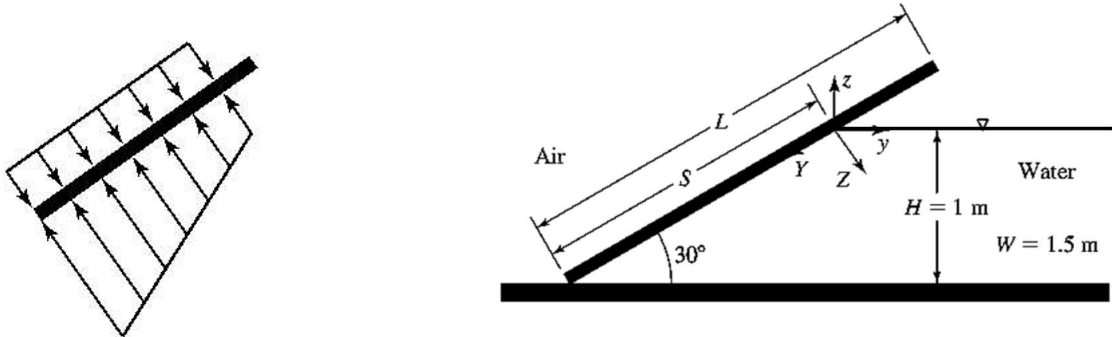
$$F_{\text{net}} = F_w - F_A =$$

92

مثال

An inclined gate of length $L = 3$ m and width $W = 1.5$ m holds back water in an irrigation channel. What is the force of the water on the gate when the channel is filled to height of $H = 1$ m? What is the net force on the gate?

Solution ???

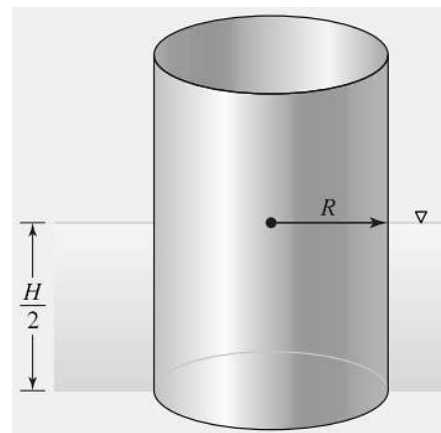


93

مثال

A cylindrical instrument container of height $H = 1$ m and radius $R = 0.25$ m has been designed so that it is neutrally buoyant when partially immersed to a depth $H/2$ in water. Find the weight of the cylinder and its contents.

Solution ???

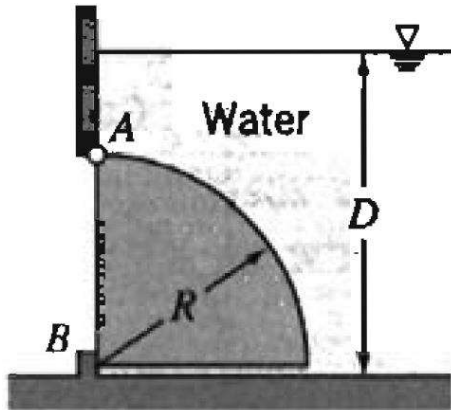


94

مثال

■ دریچه ای به شکل یک ربع استوانه با عرض ۲ متر در مسیر آب قرار دارد. فاصله کف دریچه تا سطح آب ۳ متر است. نیروی کل وارد بر دریچه را به دست آورید. شعاع دریچه برابر با ۲ متر می باشد.

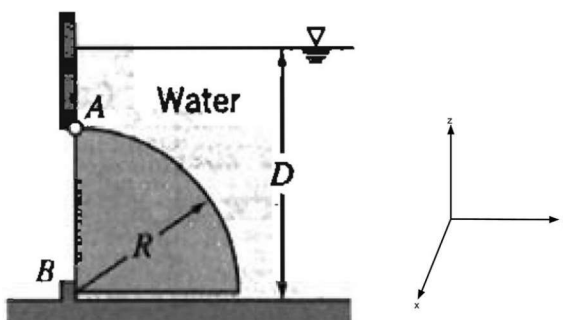
حل ???



95

حل

■ ابتدا محاسبه F_H

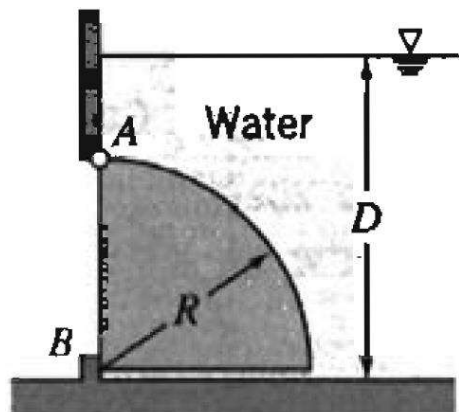


96

حل

■ حال محاسبه F_V

$$F_V = -\gamma \cdot V$$



$$F_B =$$

■ در نهایت

97



مجمع آموزش عالی گناباد

فصل سوم: دینامیک سیالات

مکانیک سیالات در مهندسی شیمی

دکتر وحید محمودی

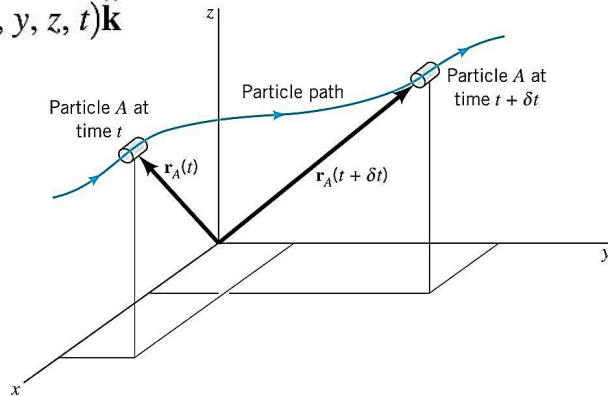
گروه مهندسی شیمی

■ **تئوری پیوستگی سیال:** جریان سیال از ذرات به هم پیوسته سیال تشکیل شده است که نسبت به یکدیگر برهم کنش دارند. هر ذره از تعداد زیادی مولکول تشکیل شده است که می توان متغیرهای جریان مانند سرعت، شتاب، فشار و دانسیته را به کمک رفتار این ذرات در هر زمان مشخص t تفسیر کرد.

$$\mathbf{V} = u(x, y, z, t)\hat{\mathbf{i}} + v(x, y, z, t)\hat{\mathbf{j}} + w(x, y, z, t)\hat{\mathbf{k}}$$

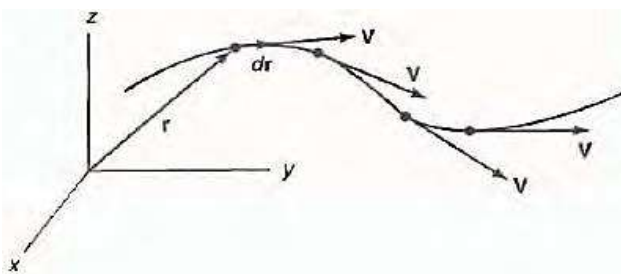
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$$

$$d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{V}_A$$



■ روش های مطالعه جریان سیالات:

■ روش لاگرانژی: در این روش، یک ذره کوچک از سیال در نظر گرفته شده و حرکت آن دنبال می شود (**رویکرد جرم کنترل**).



■ این ذره می تواند تغییر شکل دهد، اما

همواره به صورت مجموعه ای مولکولی در نظر گرفته می شود.

■ ذره در هر نقطه، مکان، سرعت و شتاب خاص خود را دارد.

■ در این حالت، این متغیرها فقط تابع زمان هستند.

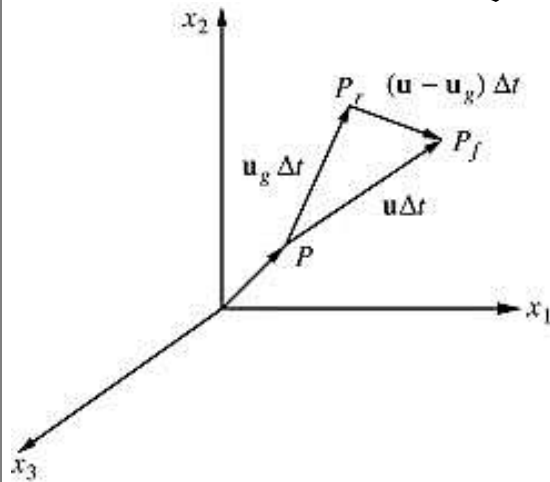
■ این روش را می توان برای تعداد زیاد ذره در نظر گرفته و اثر ذرات سیال بر روی یکدیگر را دید.

مقدمه

▪ روش های مطالعه جریان سیالات:

▪ روش اویلری: در این روش، یک نقطه در نظر گرفته شده و بعد، سیال را مشاهده می کنیم که چگونه از آن نقطه عبور کرده و سرعتش تغییر می کند.

▪ بنابراین سرعت و شتاب تابع مکان و زمان خواهند بود.



▪ پس در روش اویلری، بخشی از فضا که توسط سیال اشغال شده است انتخاب و تغییرات فشار، دما، سرعت، شتاب و ... که در آن بخش اتفاق می افتد مورد مطالعه قرار می گیرد.

(رویکرد حجم کنترل)

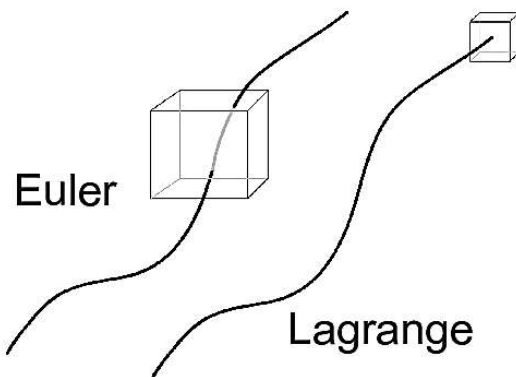
101

مقدمه

▪ روش های مطالعه جریان سیالات:

▪ روش اویلری: در این روش، یک نقطه در نظر گرفته شده و بعد، سیال را مشاهده می کنیم که چگونه از آن نقطه عبور کرده و سرعتش تغییر می کند.

▪ بنابراین سرعت و شتاب تابع مکان و زمان خواهند بود.



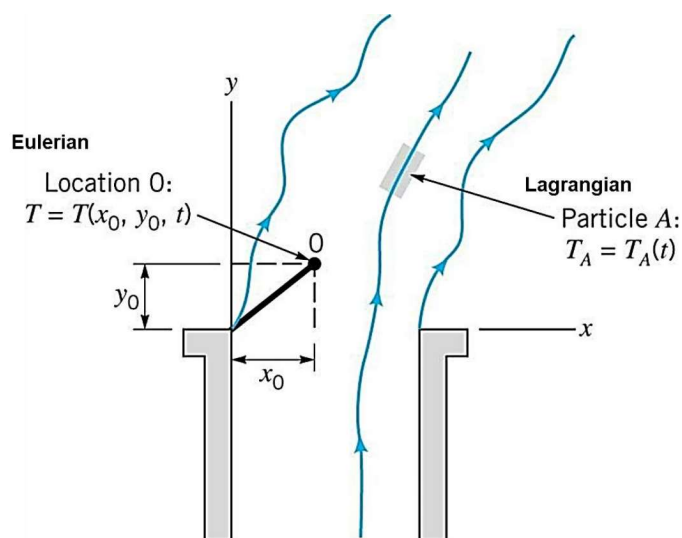
▪ پس در روش اویلری، بخشی از فضا که توسط سیال اشغال شده است انتخاب و تغییرات فشار، دما، سرعت، شتاب و ... که در آن بخش اتفاق می افتد مورد مطالعه قرار می گیرد.

(رویکرد حجم کنترل)

102

مقایسه روش اویلری و لاگرانژی

■ مثال: اندازه گیری دمای سیال



در روش لاگرانژی، دستگاه مختصات بر ذره سوار است و با حرکت ذره، جابجا می شود. اما در روش اویلری، دستگاه مختصات ثابت بوده و این ذرات هستند که نسبت به مبدأ مختصات حرکت می کنند.

103

مقایسه روش اویلری و لاگرانژی

■ مثال: برای مشاهده مشکلات ترافیکی می توان عده ای را استخدام کرد که سوار بر ماشین در شهر بگردند و مشکلات را گزارش کنند (لاگرانژی)، یا سر چهار راههایی بایستند و مشکلات را مشاهده کنند (اویلری)، ولی هر دو به یک نتیجه خواهند رسید.

■ Please see the links below:

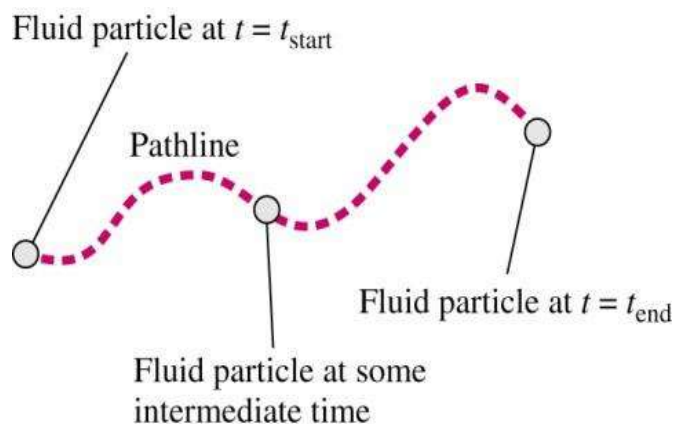
■ <https://www.youtube.com/watch?v=iDIzLkic1pY>

■ <https://www.youtube.com/watch?v=27uejc8QJgU>

104

تعاریف

- میدان جریان (Flow Field): میدان جریان ناحیه ای از جریان است (در روش اویلری) که جریان در آن مطالعه می شود.
- خط گذر (Path line): خط گذر مکان نقاطی است که یک ذره همراه با جریان از این نقاط عبور می کند. خط گذر سابقه مکان ذرات را به ما می دهد.



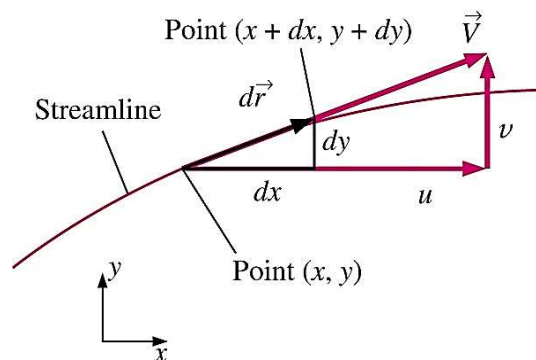
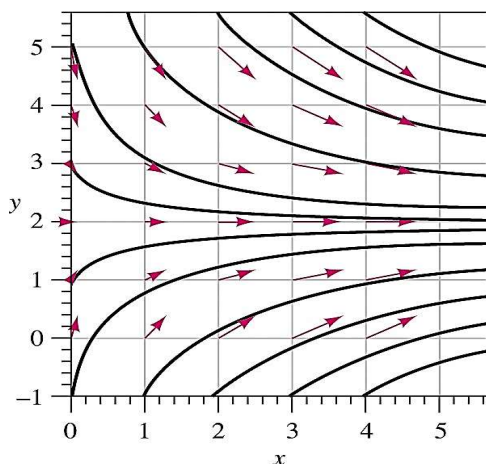
105

تعاریف

- خط جریان (Stream line): مکان نقاطی را که ذرات در آنجا بوده اند که مماس بر بردار سرعت در هر نقطه می باشد. خط جریان به کمک رابطه زیر بدست می آید:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$$

▪ مثال



106

تعاریف

▪ خط جریان (Stream line): مکان نقاطی را که ذرات در آنجا بوده اند که مماس بر بردار سرعت در هر نقطه می باشد. خط جریان به کمک رابطه زیر بدست می آید:

$$v = 2xi - 4yj$$

▪ مثال

$$v \times dr = 0 \Rightarrow (2xi - 4yj) \times (dxi + dyj) = 0$$

$$\Rightarrow (2xdy + 4ydx)k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -2 \frac{dx}{x} \Rightarrow x^2 y = c$$

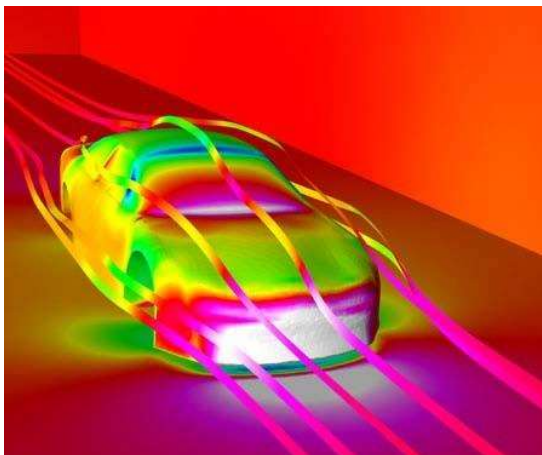
$$\begin{aligned} ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j \end{aligned}$$

▪ در جریان های پایا (steady state flow)، خط گذر و خط جریان بر یکدیگر منطبق هستند. در نتیجه، ما فقط از اصطلاح خط جریان استفاده می کنیم.

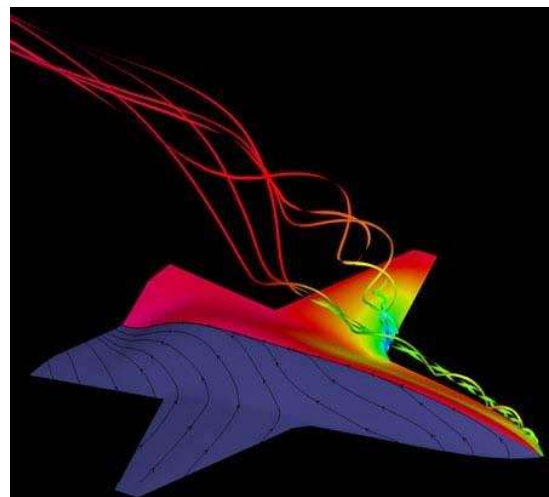
107

تعاریف

NASCAR surface pressure contours and streamlines



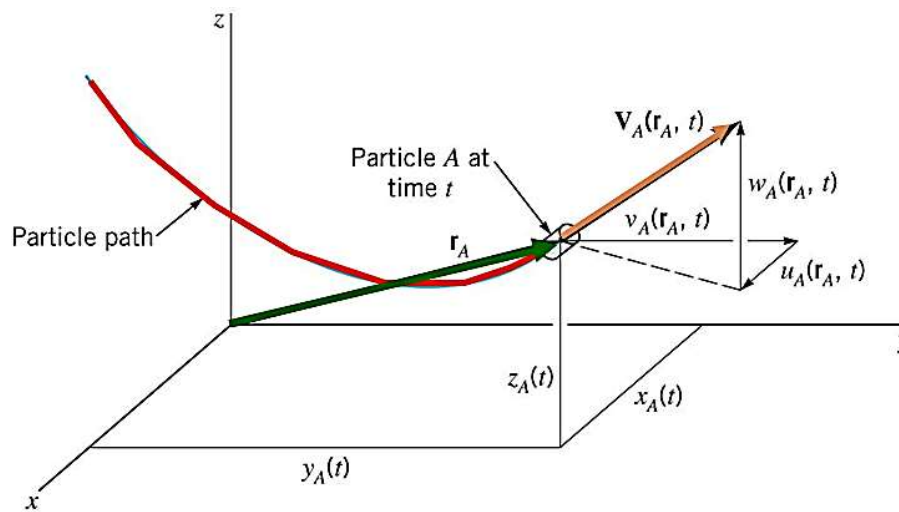
Airplane surface pressure contours, volume streamlines, and surface streamlines



108

تعاریف

■ شتاب



$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

109

تعاریف

■ با توجه به تابعیت بردار سرعت نسبت به زمان و هر سه بعد مکان داریم:

$$V = V(x, y, z, t)$$

$$\Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$= V_x \frac{\partial V}{\partial x} + V_y \frac{\partial V}{\partial y} + V_z \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

110

تعاریف

▪ مولفه های شتاب در سه جهت عبارتند از:

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

▪ برای راحتی اغلب از تعریف مشتق کلی استفاده می شود.

$$a = \frac{DV}{Dt} \quad \frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

▪ مشتق کلی در حقیقت رابطه بین سیستم لاگرانژی (فقط تابع t) و سیستم اویلری (تابع x, y, z و t) می باشد.

111

تعاریف

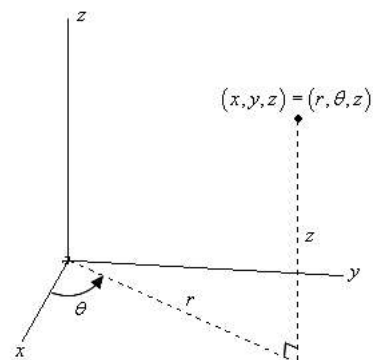
▪ مشتق کلی در مختصات استوانه ای

$$\frac{D}{Dt} = V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$



112

تعاریف

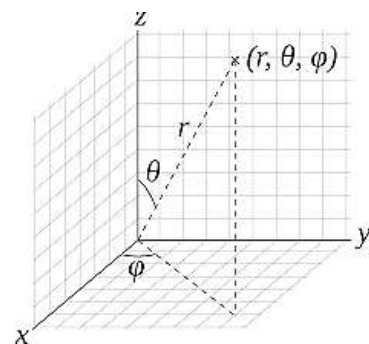
▪ مشتق کلی در مختصات کروی

$$\frac{D}{Dt} = V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} - \frac{V_r V_\theta - V_\phi^2 \cot \theta}{r}$$

$$a_\phi = \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r V_\phi + V_\theta V_\phi \cot \theta}{r}$$



113

تعاریف

▪ انواع مولفه های شتاب

$$\frac{D}{Dt} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

▪ شتاب محلی یا نقطه ای است و بقیه جملات شتاب انتقالی نامیده می شوند.

▪ مثال برای شتاب نقطه ای (local): اگر شیر را باز کنیم، سیال به جریان می افتد.

▪ مثال برای شتاب انتقالی (convective): وقتی که سطح مقطع لوله تغییر می کند، سیال شتاب می گیرد.

▪ هر دو شتاب هستند ولی با دلایل متفاوت.

114

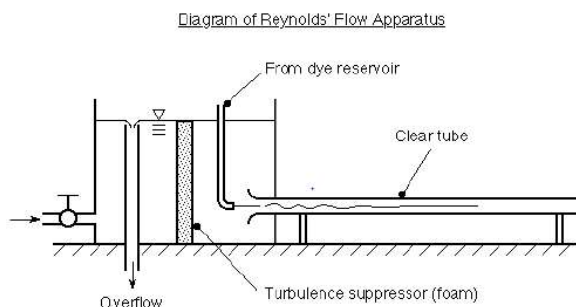
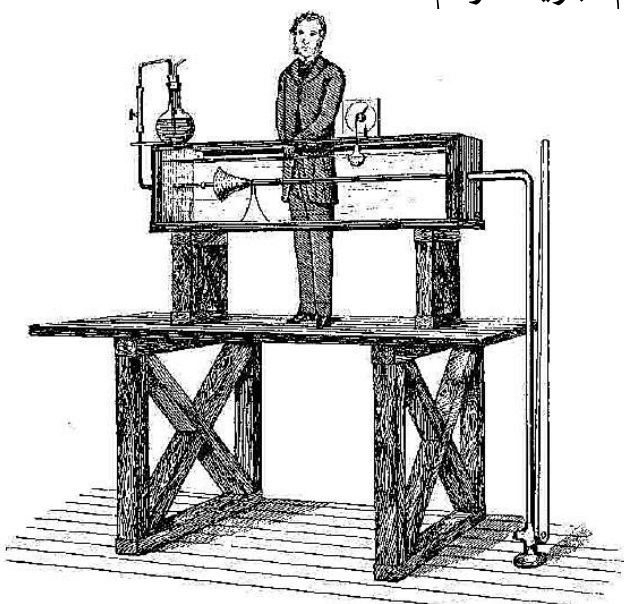
تعاریف

- **جریان غیر ویسکوز (Inviscid flow):** در این نوع جریان، ویسکوزیته تأثیری در جریان ندارد یا قابل صرفنظر کردن است.
- این حالت وقتی پیش می آید که مقدار تنش برشی نسبت به نیروهای دیگر بسیار کم باشد. در این حالت کافی است در معادلات مقدار ویسکوزیته را برابر صفر قرار دهیم.
- در حالت کلی همه سیالات به هر حال ویسکوزیته دارند، ولی مثلاً در جریانهای خارجی که روی سطوح اتفاق می افتد، می توان فرض کرد که اثر ویسکوزیته قابل صرفنظر کردن است.
- **جریان ویسکوز (Viscous flow):** در این جریان از اثرات ویسکوزیته نمی توان صرفنظر کرد و تنش برشی باید در نظر گرفته شود.
- مثلاً در لایه مرزی باید ویسکوزیته را در نظر گرفت و یا در جریان درون لوله ها. دلیل این مساله این است که سیال به جداره می چسبد که به خاطر ویسکوزیته است.
- در جریان ویسکوز هدر رفتن انرژی داریم.

115

رژیم جریان سیال

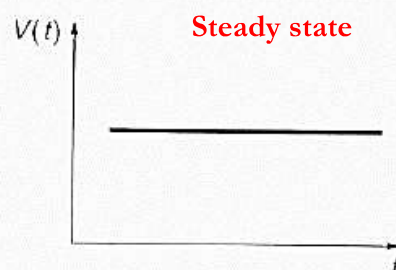
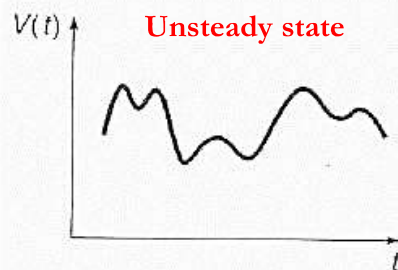
- نخستین بار دانشمندی به نام رینولدز به مطالعه رفتار جریان ها پرداخت.
- انواع جریان های ویسکوز: جریان آرام، جریان درهم



116

رژیم جریان سیال

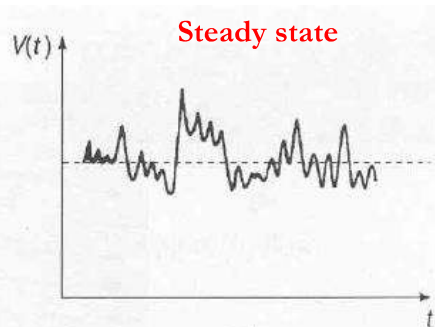
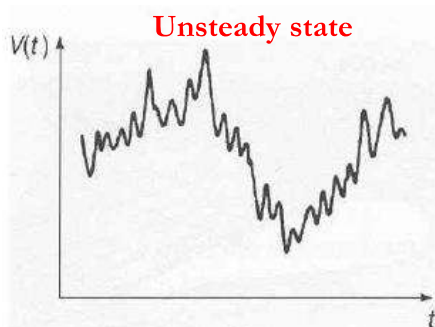
- در جریان آرام (Laminar) ذره سیال در حال حرکت با ذرات اطراف خود مخلوط نمی شود.



117

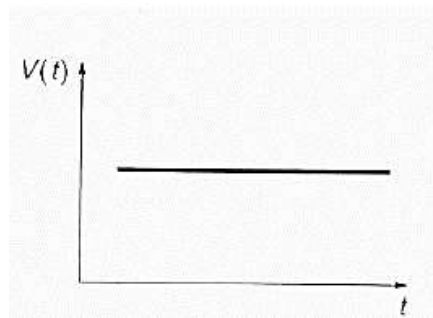
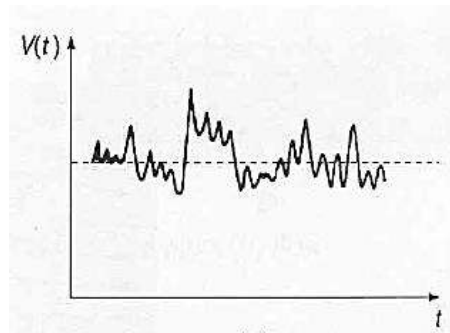
رژیم جریان سیال

- در جریان درهم یا آشسته (Turbulent) ذرات سیال حرکات نامنظم دارند و مقادیر فشار و سرعت بطور اتفاقی تغییر می کنند.



118

رژیم جریان سیال



119

رژیم جریان سیال

- پارامترهای مهم در تعیین نوع رژیم جریان عبارتند از:
- بُعد مشخصه: اگر این پارامتر زیاد باشد احتمال درهم بودن جریان بیشتر است. تعریف این بُعد در سیستم های مختلف متفاوت است. مثلاً این بُعد در سیستم جریان در لوله، همان قطر لوله است.
- سرعت (متوسط) جریان: اگر سرعت جریان بیشتر باشد، جریان در هم می شود.
- دانسیته جریان: هر چه دانسیته سیال بیشتر باشد احتمال رسیدن به رژیم درهم بیشتر می شود و بالعکس.
- ویسکوزیته دینامیک: اگر کمتر باشد، جریان در هم می شود.
- عدد رینولدز (Re) پارامتری است که به طور کمی تعیین کننده رفتار جریان است. **بعد عدد رینولدز؟؟؟**

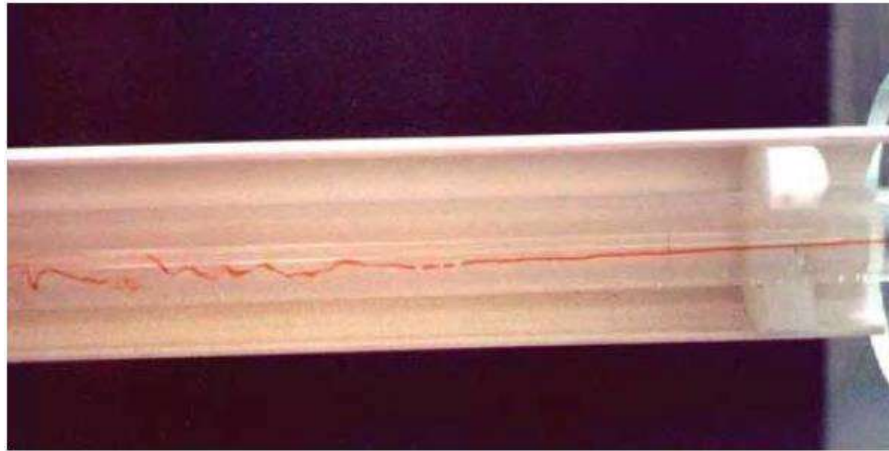
$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu}$$

- اگر Re کم باشد جریان آرام و اگر Re زیاد باشد جریان درهم است...!

120

رژیم جریان سیال

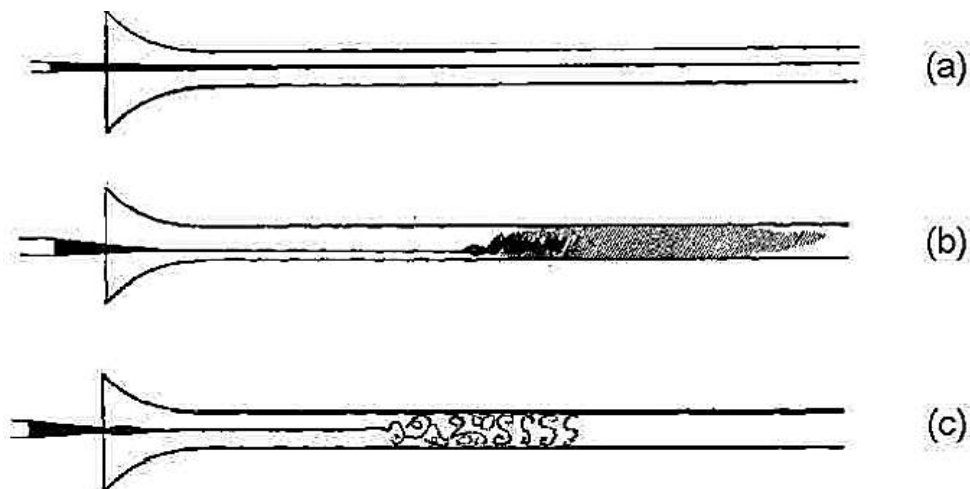
- برای مثال، در جریان درون لوله ها، در مقادیر $Re < 2100$ جریان آرام و در مقادیر $Re > 4000$ جریان درهم در نظر گرفته می شود.
- اگر $2100 < Re < 4000$ باشد، جریان ناپایدار یا واسطه خواهد بود.



121

رژیم جریان سیال

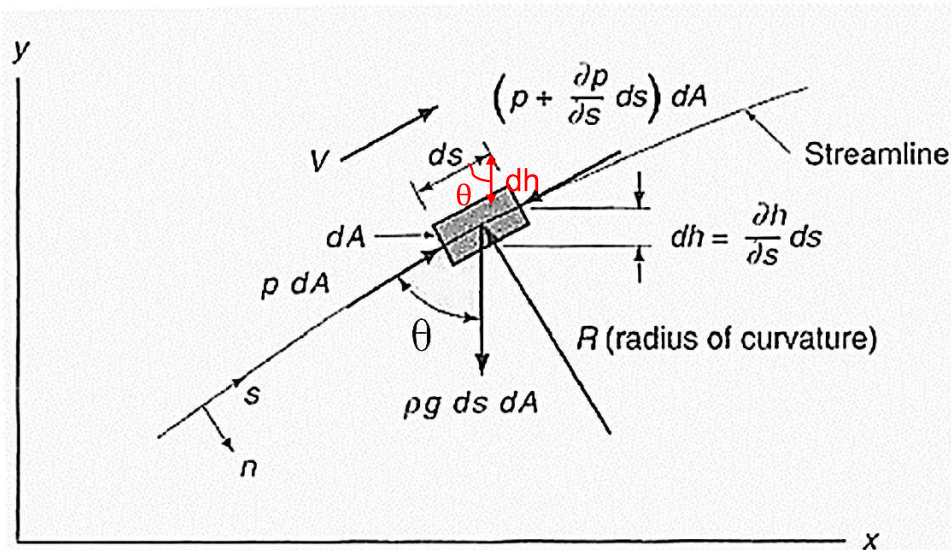
- برای مثال، در جریان درون لوله ها، در مقادیر $Re < 2100$ جریان آرام و در مقادیر $Re > 4000$ جریان درهم در نظر گرفته می شود.
- اگر $2100 < Re < 4000$ باشد، جریان ناپایدار یا واسطه خواهد بود.



122

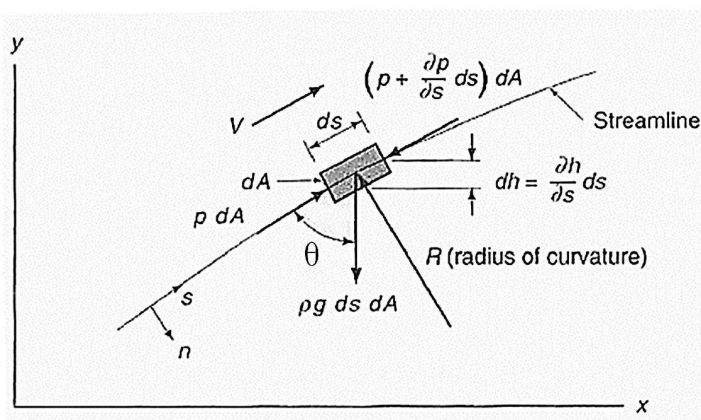
معادله برنولی

■ برای بدست آوردن این معادله از نیروی ویسکوز صرف نظر می کنیم. این در حالتی است که نیروهای فشاری خیلی بیشتر از تنش برشی باشند ولی باید دقت داشت که در فواصل طولانی ممکن است این فرض صحیح نباشد و بنابراین باید معادله برنولی را با احتیاط استفاده کرد. برای یک المان از سیال:



123

معادله برنولی



■ بنا به قانون دوم نیوتن

$$\sum F_s = ma_s$$

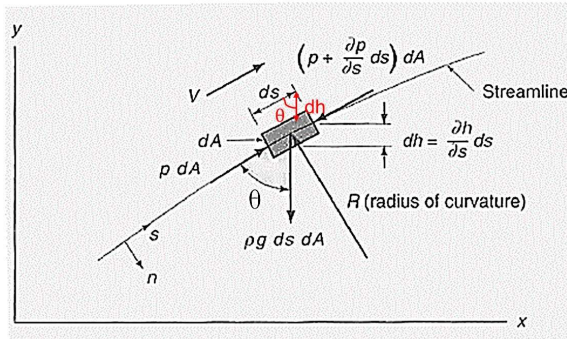
$$p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - \rho g ds dA \cos \theta = \rho ds dA . a_s$$

$$a_s = \frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$S.S. \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

124

معادله برنولی



■ داریم:

$$dh = ds \cos \theta = \frac{\partial h}{\partial s} ds \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial s} = \cos \theta$$

■ قبلاً دیدیم

$$p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - \rho g ds dA \cos \theta = \rho ds dA \cdot a_s$$

$$\div ds dA \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial S} - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh \right) = 0 \Rightarrow \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gh = cte$$

125

معادله برنولی

■ بنابراین روی هر دو نقطه خط جریان می توان نوشت:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gh_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gh_2$$

■ این معادله برنولی است و برای بدست آوردن آن فرض های زیر بکار رفته است:

- جریان غیر ویسکوز (بدون تنش برشی)

- جریان پایا

- جریان روی یک خط جریان

- چگالی ثابت (جریان تراکم ناپذیر)

- جریان غیر چرخشی

126

معادله برنولی

■ معمولاً این رابطه را بر g تقسیم می کنند:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2$$

Energy per unit volume before = Energy per unit volume after

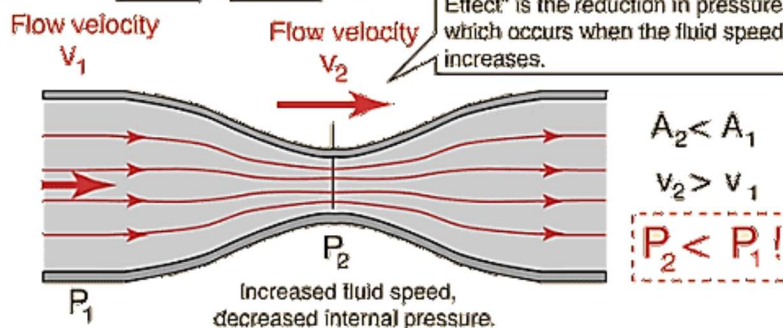
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

Pressure
Energy

Kinetic
Energy
per unit
volume

Potential
Energy
per unit
volume

The often cited example of the Bernoulli Equation or "Bernoulli Effect" is the reduction in pressure which occurs when the fluid speed increases.



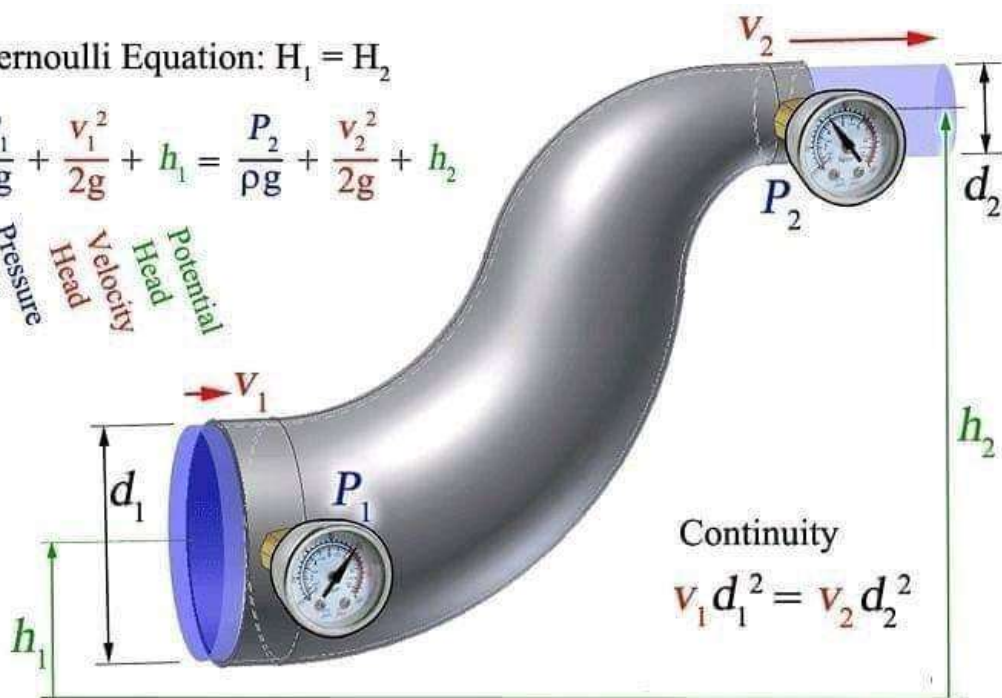
127

معادله برنولی

Bernoulli Equation: $H_1 = H_2$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

Pressure
Head
Velocity
Head
Potential
Head

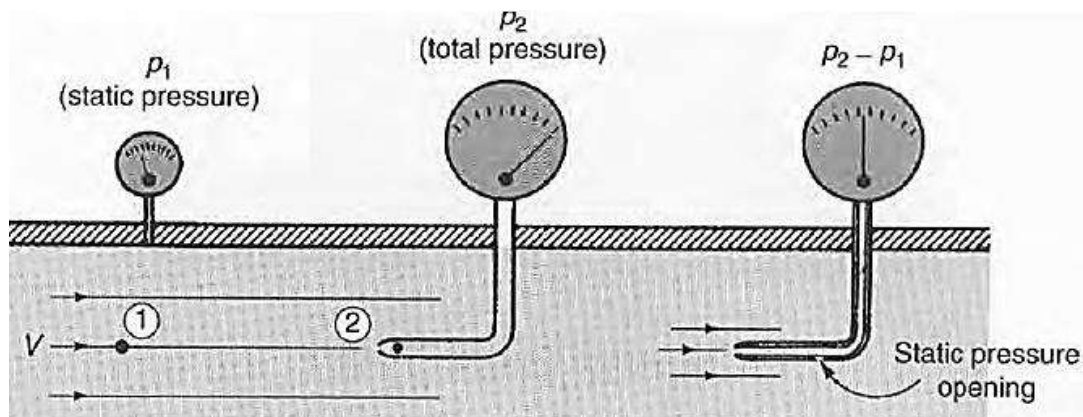


Continuity

$$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$$

128

معادله برنولی



فشار استاتیکی

$$p$$

فشار سکون
(لوله پیتو)

$$p + \rho \frac{V^2}{2}$$

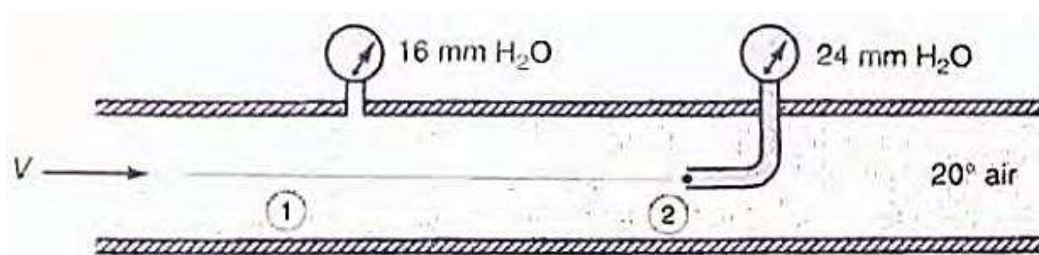
اختلاف بین فشار
استاتیکی و فشار سکون

$$\rho \frac{V^2}{2}$$

129

کاربرد معادله برنولی

■ اندازه گیری سرعت سیال با استفاده از لوله پیتو

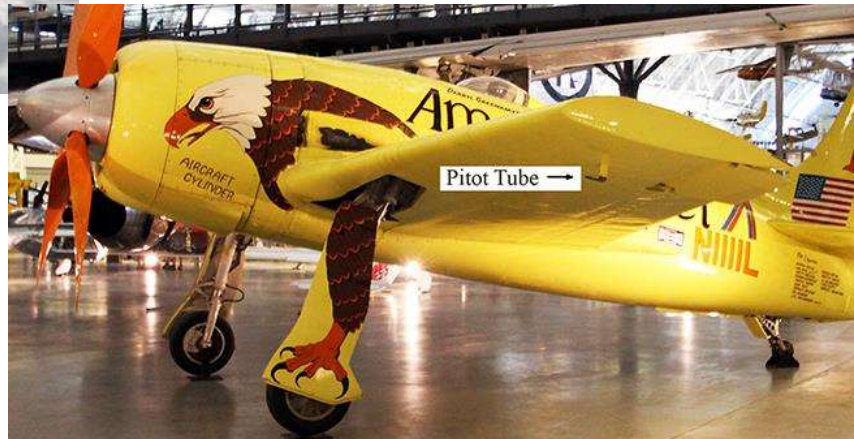


$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + h_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_2 - P_1)}$$

130

کاربرد لوله پیتو



131

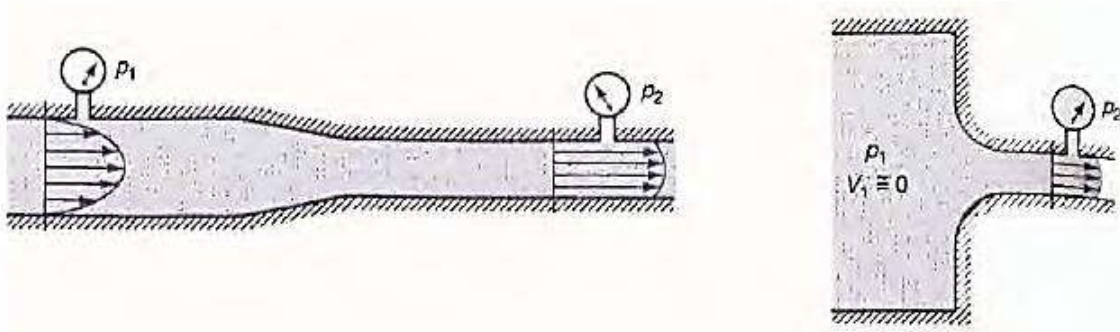
کاربرد معادله برنولی

- در چه سیستم هایی می توان از رابطه برنولی استفاده کرد؟
- الف) در جریان های خارجی که از ویسکوزیته صرف نظر می شود.
مثال: - تعیین ارتفاعی که آب از لوله آتش نشانی پرتاب می شود.
- تعیین نیروی وارده بر پنجره از سوی باد.
- ب) در جریان های داخلی در فاصله کوتاه.
مثال: - جریان در جایی که تغییر سطح مقطع داریم.

132

کاربرد معادله برنولی

■ در چه سیستم هایی می توان از رابطه برنولی استفاده کرد؟

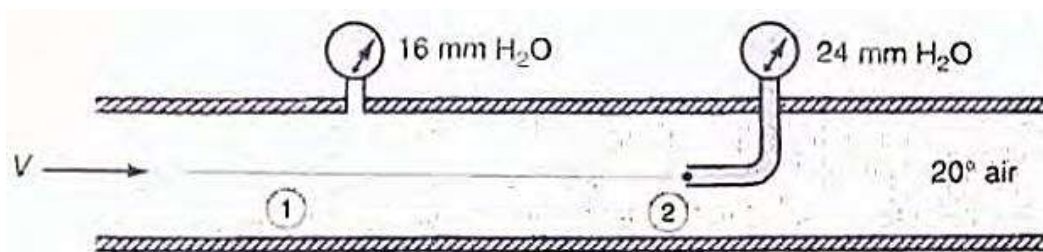


■ در این حالت ها، چون فاصله کم است از اتلاف انرژی بوسیله نیروی ویسکوز صرف نظر شده و جریان غیرویسکوز فرض می شود.

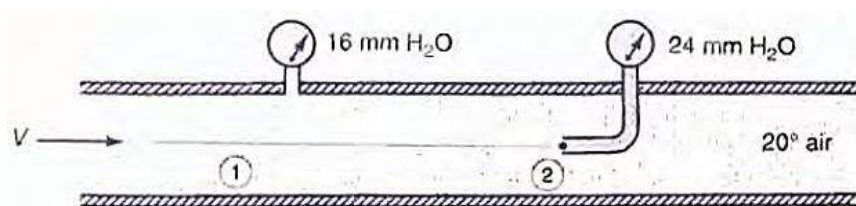
133

مثال

■ هد فشار استاتیک به وسیله یک لوله پیتو اندازه گرفته می شود. با توجه به داده های شکل، سرعت هوا را به دست آورید.



134



$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_2 - P_1)}$$

$$\frac{(101325 + 16 \times 10^{-3} \times 1000 \times 9.8)}{8.314 \times (273 + 20)} \times 29 = 1.2 \text{ Kg / m}^3$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{1.2} \times \underbrace{(24 - 16)}_{\substack{\text{mm H}_2\text{O} \\ \downarrow \\ \text{تبدیل} \\ \text{به متر}}} \times \underbrace{10^{-3}}_{\downarrow} \times \underbrace{1000}_{\substack{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \\ \downarrow}} \times \underbrace{9.81}_{\downarrow g}} = 11.44 \text{ m / s}$$

ΔP



شکل انتگرالی معادلات حرکت سیال

کمیت هایی هستند که مقدار انتگرالی آن ها مهم است:

$$Q = \int_A u dA$$

▪ شدت جریان حجمی، انتگرال سرعت روی سطح است.

▪ مقدار انتقال حرارت از انتگرال شار حرارتی روی سطح به دست می آید.

$$F = \int_A \tau dA$$

▪ نیروی برشی عبارت است از انتگرال تنش روی سطح

$$m = \int_V \rho dV$$

▪ جرم، انتگرال دانسیته روی حجم است.

$$K = \int_m \frac{V^2}{2} dm$$

▪ انرژی جنبشی همان انتگرال $V^2/2$ روی جرم سیال است.

در این بخش شکل انتگرالی قوانین زیر مورد بررسی قرار می گیرند:

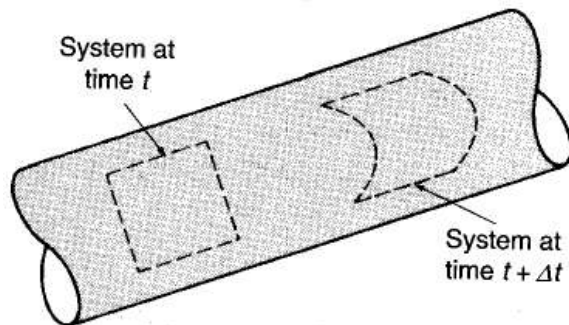
• بقای جرم

• قانون اول ترمودینامیک

• قانون دوم نیوتن

نکته: همه قوانین بیان شده برای یک سیستم ارائه شده اند.

- سیستم عبارتست از مقدار معینی از یک ماده که ممکن است تحت تغییر شکل، تغییر مکان یا تغییر دما قرار گیرد، اما جرم آن تغییر نمی کند (دیدگاه لاگرانژی).



بیان قوانین

بیان قانون بقای جرم:

- جرم یک سیستم همواره و در هر شرایطی ثابت باقی می ماند.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0$$

بیان قانون اول ترمودینامیک:

- شدت تغییر انرژی سیستم برابر است با اختلاف بین گرمای داده شده به سیستم و کار گرفته شده از آن.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} E \rho dV$$

$$E = U + \phi + K$$

بیان قوانین

بیان قانون دوم نیوتن:

▪ برآیند نیروهای وارد بر سیستم برابر با شدت تغییرات اندازه حرکت در سیستم است.

$$\sum F = \frac{D}{Dt} \int_{sys} v \rho dV$$

▪ اگر دانسیته و سرعت در تمام سیستم ثابت باشند:

$$\sum F = ma$$

▪ در تمام قوانین گفته شده در مورد یک کمیت مقداری از سیستم صحبت می شود که آن را با N_{sys} نمایش می دهیم.

$$\frac{DN_{sys}}{Dt}$$

141

خواص مقداری مهم

▪ جرم

$$N_{sys} = \int_{sys} \rho dV$$

▪ انرژی

$$N_{sys} = \int_{sys} E \rho dV$$

▪ اندازه حرکت

$$N_{sys} = \int_{sys} v \rho dV$$

▪ و به طور کلی

$$N_{sys} = \int_{sys} \eta \rho dV$$

142

خواص مقداری و شدتی

▪ اگر خاصیت مقداری N از سیال را در نظر بگیریم و:

$$\eta = \frac{N}{m}$$

▪ η یک خاصیت شدتی خواهد بود که به مقدار ماده بستگی ندارد.

▪ در نتیجه داریم:

$$N = \eta m = \eta \rho V \Rightarrow dN = \eta \rho dV$$

▪ با انتگرال گیری از طرفین

$$N_{sys} = \int_{sys} \eta \rho dV$$

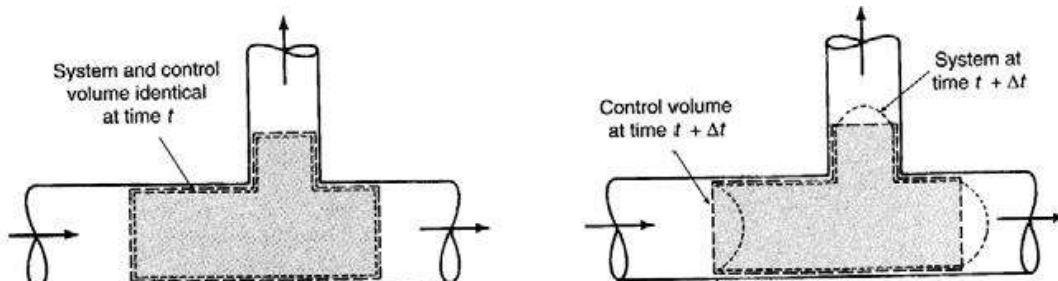
143

سیستم و حجم کنترل

▪ در بیشتر موارد آن چه مورد نظر است محدوده خاص مکانی است که به آن حجم کنترل (Control Volume) می گویند.

▪ حجم کنترل بخش محدودی در فضا است که مرز آن، سطح کنترل (Control Surface) نامیده می شود. مقدار و ماهیت ماده داخل حجم کنترل ممکن است تغییر کند، اما شکل حجم کنترل ثابت می ماند (دیدگاه اویلری).

▪ تفاوت بین سیستم و حجم کنترل



144

تبدیل معادلات سیستم به حجم کنترل

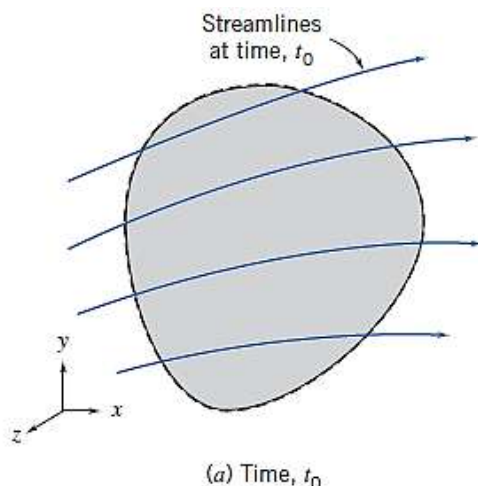
▪ یک سیستم را در لحظه t در نظر بگیرید:

▪ جرمی که همراه سیستم است، با آن

انتقال می یابد.

▪ در این لحظه، سیستم و حجم کنترل

بر روی یکدیگر منطبق هستند.

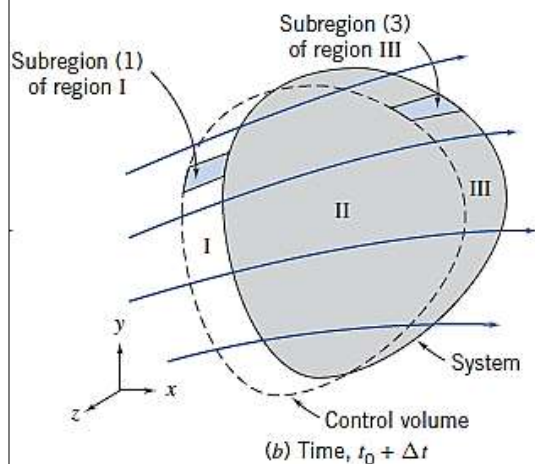


145

تبدیل معادلات سیستم به حجم کنترل

▪ پس از گذشت زمان به میزان dt ، حجم کنترل ثابت است، اما سیستم حرکت کرده و در موقعیت جدید قرار گرفته است.

▪ برای هر خاصیت مقداری سیستم (N_{sys})



$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{system}} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_s)_{t_0 + \Delta t} - N_s)_{t_0}}{\Delta t}$$

$$N_s)_{t_0 + \Delta t} = (N_{II} + N_{III})_{t_0 + \Delta t}$$

$$= (N_{CV} - N_I + N_{III})_{t_0 + \Delta t}$$

و

$$N_s)_{t_0} = (N_{CV})_{t_0}$$

146

تبدیل معادلات سیستم به حجم کنترل

■ با قرار دادن در رابطه مشتق

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_{CV} - N_I + N_{III})_{t_0 + \Delta t} - N_{CV)_{t_0}}}{\Delta t}$$

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{CV)_{t_0 + \Delta t} - N_{CV)_{t_0}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III)_{t_0 + \Delta t}}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_I)_{t_0 + \Delta t}}{\Delta t}$$

①

Rate of change in C.V.

②

(Out – in) in C.V.

③

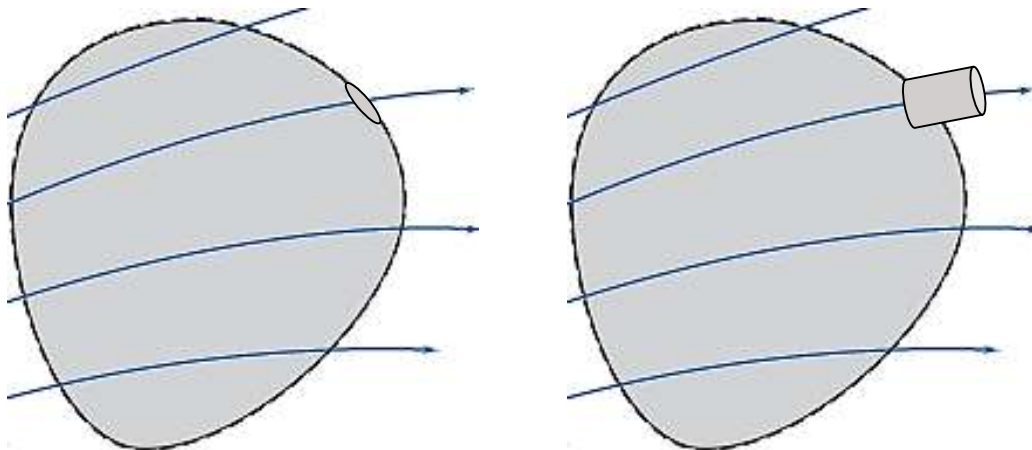
■ ترم (۱) در معادله بالا خواهد شد:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{CV)_{t_0 + \Delta t} - N_{CV)_{t_0}}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{CV}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV$$

147

تبدیل معادلات سیستم به حجم کنترل

■ برای تعیین رابطه جایگزین به جای ترم (۲)، المانی از سیال با سطح dA را در نظر می گیریم.



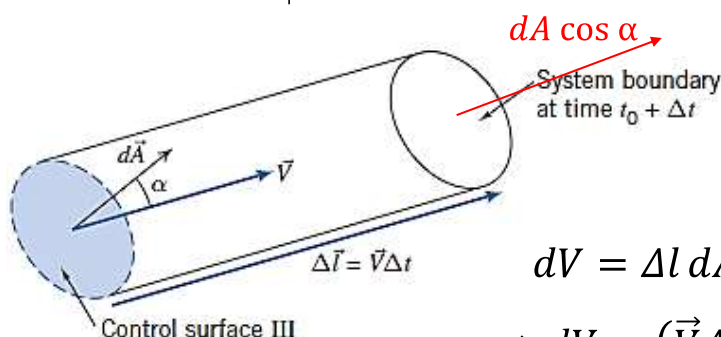
در لحظه t_0

در لحظه $t_0 + \Delta t$

148

تبدیل معادلات سیستم به حجم کنترل

■ با در نظر گرفتن شکل بزرگ شده المان در زمان $t_0 + \Delta t$ داریم:



در نتیجه

$$dV = \Delta l dA \cos \alpha = \overrightarrow{\Delta l} \cdot \overrightarrow{dA}$$

$$\Rightarrow dV = (\vec{V} \Delta t) \cdot \overrightarrow{dA} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA} \Delta t$$

$$dN_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = (\eta \rho d\mathbf{V})_{t_0+\Delta t} \Rightarrow dN_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\text{CS}_{\text{III}}} dN_{\text{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\text{CS}_{\text{III}}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Delta t}{\Delta t} = \int_{\text{CS}_{\text{III}}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

تبدیل معادلات سیستم به حجم کنترل

■ به شکل مشابهی برای ترم (۳) نیز می توان نوشت:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_I)_{t_0 + \Delta t}}{\Delta t} = - \int_{\text{CS}_1} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

■ و با جایگزینی در معادله اصلی داریم:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{CV})_{t_0+\Delta t} - N_{CV})_{t_0}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_I})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV + \int_{CS_1} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{CS_{in}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

■ از آن جا که مجموع سطح ناحیه I و III معادل سطح کنترل است:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \eta \rho dV + \int_{\text{CS}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

■ قضیه انتقال رینولدز

برخی نکات مهم

- در رابطه قضیه انتقال رینولدز، در هر لحظه سیستم و حجم کنترل بر روی هم منطبق هستند.
- در این رابطه، کمیت ها نسبت به حجم کنترل سنجیده می شوند. در نتیجه اگر حجم کنترل حرکت داشته باشد، باید مقادیر به صورت نسبی (یعنی نسبت به حجم کنترل) در رابطه قضیه انتقال رینولدز قرار داده شوند.
- قضیه انتقال رینولدز تغییرات خاصیت گسترده N از سیستم را نسبت به زمان با حجم کنترل مرتبط می کند.

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \eta \rho dV + \int_{\text{CS}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

151

حالت های ساده تر

- در حالت پایا:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \rho) = 0$$

$$\frac{DN_{\text{sys}}}{Dt} = \int_{\text{c.s.}} \eta \rho \hat{n} \cdot v dA$$

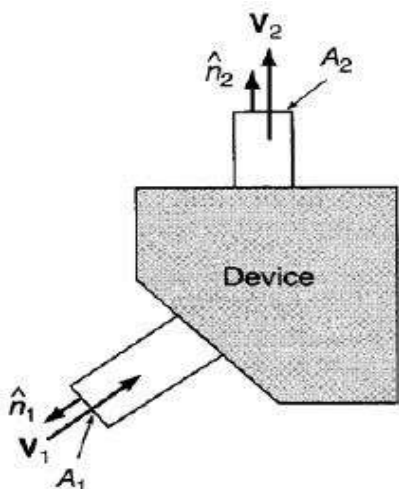
- اگر فقط یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم:

$$\frac{DN_{\text{sys}}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2 \rho_2 v_2 dA - \int_{A_1} \eta_1 \rho_1 v_1 dA$$

- در این حالت، فرض شده جریانهای ورودی و خروجی عمود بر سطح های مربوطه هستند.

152

حالت های ساده تر



▪ در نتیجه برای یک ورودی و یک خروجی:

$$n \cdot v_1 = -v_1 \quad n \cdot v_2 = v_2$$

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2 \rho_2 v_2 dA - \int_{A_1} \eta_1 \rho_1 v_1 dA$$

▪ در صورتی که متغیرهای درون انتگرال روی

سطح، مقدار ثابتی داشته باشند:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \eta_2 \rho_2 v_2 A_2 - \eta_1 \rho_1 v_1 A_1$$

▪ اگر چند ورودی و خروجی داشته باشیم:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = \sum_{i=1}^N \eta_i \rho_i v_i \cdot \hat{n}_i A_i$$

153

حالت های ساده تر

▪ برای جریان ناپایا، یک ورودی و یک خروجی و مقادیر ثابت در انتگرال:

$$\frac{DN_{sys}}{Dt} = V_{c.v.} \frac{d(\eta \rho)}{dt} + \eta_2 \rho_2 v_2 A_2 - \eta_1 \rho_1 v_1 A_1$$

▪ اثبات؟؟؟

154

قانون بقای جرم

■ در صورتی که خاصیت گسترده سیستم، جرم آن باشد:

$$\eta = \frac{N}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \eta \rho dV + \int_{\text{CS}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

■ در نتیجه می توان برای سیستم نوشت:

بنا به تعریف سیستم

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \rho dV + \int_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \rho dV + \int_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

■ در حالت پایا نیز می توان نوشت:

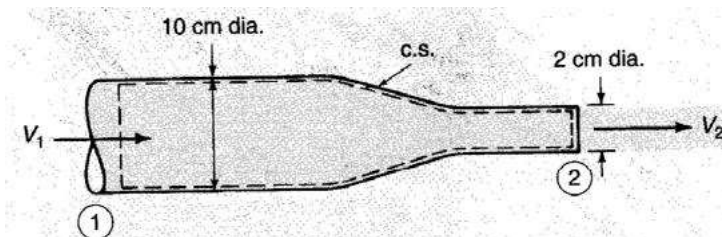
در صورت ثابت بودن دانسیته و سرعت در ورودی ها و خروجی ها

$$\int_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \sum_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

155

مثال

■ جریان پایا در یک سیستم جریان آب مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید:



سرعت سیال در مقطع ورودی

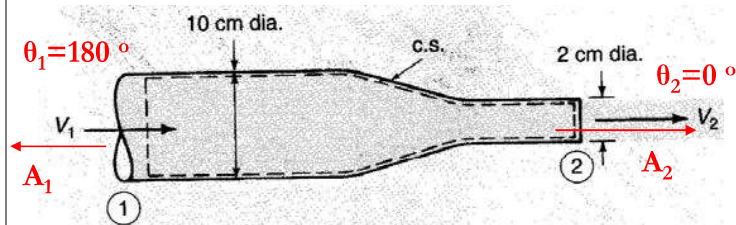
برابر با ۳ m/s است.

سرعت سیال در مقطع خروجی

و همچنین شدت جریان حجمی سیال را به دست آورید.

156

■ از آن جا که حالت پایا و سرعت و دانسیته در ورودی و خروجی ثابت است:



$$\sum_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

■ طبق تعریف، ضرب داخلی دو بردار به شکل زیر است:

$$\vec{V} \cdot \vec{A} = |\vec{V}| |\vec{A}| \cos \theta$$

➤ θ زاویه بین دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{A}$ می باشد.

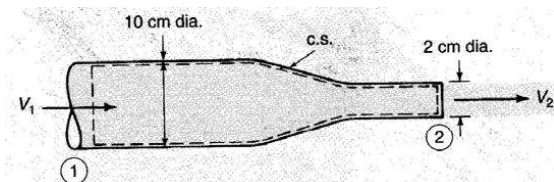
$$\Rightarrow \sum_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = (\rho \vec{V} \cdot \vec{A})_1 + (\rho \vec{V} \cdot \vec{A})_2 = -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

■ پس، در صورت وجود یک ورودی و یک خروجی با سرعت ثابت:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

معادله پیوستگی

■ از آن جا که دانسیته هم ثابت بود:



$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

■ در نتیجه:

$$\Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 3 \times \left(\frac{10}{2} \right)^2 = 75 \text{ m/s}$$

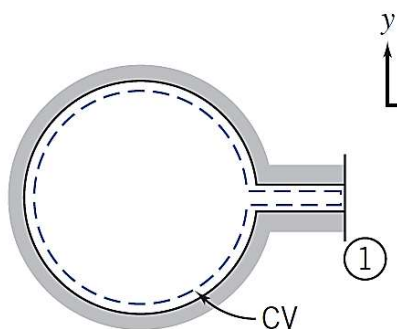
$$Q = V_1 A_1 = 3 \times \pi \times \frac{(0.1)^2}{4} = 0.0236 \text{ m}^3/\text{s}$$

مثال

▪ مخزنی با حجم 0.5 m^3 حاوی هوادر فشار 800 kpa (مطلق) در دمای 15°C می باشد. ناگهان شیر خروجی مخزن باز شده و هوا از شیر خروجی با سطح مقطع 65 mm^2 با سرعت 300 m/s خارج می شود. دانسیته هوا در لحظه اول برابر با 6 kg/m^3 است. مطلوبست تعیین نرخ لحظه ای تغییر دانسیته در مخزن.

آیا سیستم پایا است یا ناپایا؟

خواسته مساله چیست؟



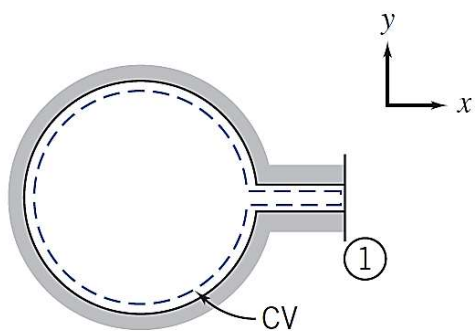
▪ حل: با در نظر گرفتن مخزن به عنوان حجم کنترل

و جرم به عنوان خاصیت گسترده داریم:

$$\eta =$$

159

حل



▪ دو فرض برای حل مساله:

- خواص در مخزن یکنواخت هستند و وابسته به زمان
- جریان در مقطع ۱ یکنواخت است (سرعت و دانسیته در مقطع ۱ یکسان).

در نتیجه فرض اول، چون دانسیته در مخزن در هر لحظه یکنواخت است (مقدار آن در هر لحظه در نقاط مختلف مخزن یکسان است)، می توان ρ را از انتگرال حجم خارج کرد:

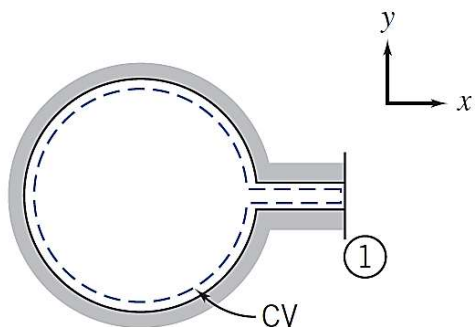
$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{CV} \int_{CV} dV \right] + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V)_{CV} + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

160

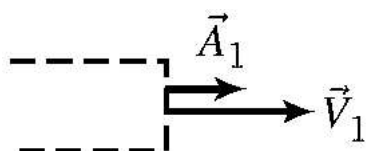
حل



▪ تنها مقطعی که جریان از آن عبور می کند مقطع (۱) است. در نتیجه:

$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \int_{A_1} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

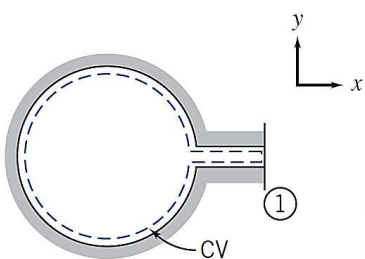
با توجه به شکل مقطع (۱) می توان گفت $\theta = 0$.
در نتیجه



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \int_{A_1} \rho V dA = 0$$

161

حل



▪ با توجه به فرض دوم (یکنواخت بودن جریان در مقطع ۱)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \rho_1 V_1 A_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) = -\rho_1 V_1 A_1$$

▪ از آن جا که حجم مخزن به زمان وابسته نیست

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_1 V_1 A_1 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_1 V_1 A_1}{V}$$

▪ و در نهایت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 65 \text{ mm}^2 \times \frac{1}{0.05 \text{ m}^3} \times \frac{\text{m}^2}{10^6 \text{ mm}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -2.34 (\text{kg/m}^3)/\text{s}$$

162

معادله اندازه حرکت

▪ برطبق قانون دوم نیوتن برای یک سیستم متحرک می دانیم

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}_{\text{system}}$$

▪ در این حالت F شامل تمام نیروهای وارد بر حجم کنترل (نیروهای سطحی F_S و نیروهای حجمی F_B) می باشد.

▪ ممتمن خطی سیستم به شکل معادله انتگرالی زیر داده می شود

$$\vec{P}_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} \vec{V} dm = \int_{V(\text{system})} \vec{V} \rho dV$$

▪ در واقع در این حالت

$$\eta = \frac{N}{m} = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{m\vec{V}}{m} = \vec{V}$$

163

معادله اندازه حرکت

▪ در نتیجه قضیه انتقال رینولدز به شکل زیر خواهد شد:

$$\sum F_{\text{system}} = \frac{d\vec{P}}{dt}_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

▪ برای حالتی که جریان در مقاطع ورودی و خروجی یکنواخت باشد:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \sum_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

▪ در حالت پایا و یک ورودی و خروجی

$$\sum F = \rho_2 A_2 v_2^2 - \rho_1 A_1 v_1^2$$

164

مثال

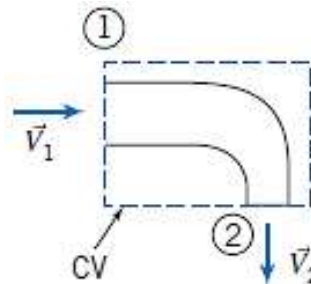
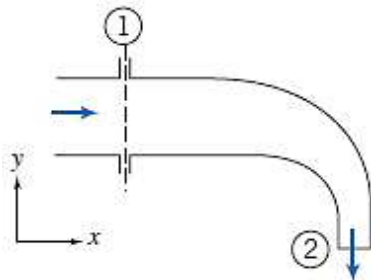
▪ مطابق شکل، جریان آب از یک زانویی ۹۰ درجه عبور می کند. در ورودی زانویی، فشار مطلق سیال برابر با ۲۲۰ kPa و سطح مقطع برابر با 0.01 m^2 می باشد. در خروجی، سطح مقطع عبور جریان برابر با 0.0025 m^2 و سرعت سیال خروجی 16 m/s است. سیال خروجی به اتمسفر تخلیه می شود. مطلوبست محاسبه نیروی لازم برای نگه داشتن زانویی.

▪ حل: داده های مسأله عبارتند از:

$$p_1 = 220 \text{ kPa (abs)} \quad A_1 = 0.01 \text{ m}^2$$

$$\vec{V}_2 = -16 \hat{j} \text{ m/s} \quad A_2 = 0.0025 \text{ m}^2$$

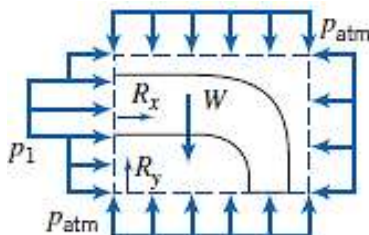
برای حل مسأله، ابتدا باید یک حجم کنترل در نظر بگیریم.



165

حل

چون سیال در مقطع خروجی، به اتمسفر تخلیه می شود فشار مطلق آن در مقطع ۲ برابر با **فشار اتمسفر** خواهد بود.

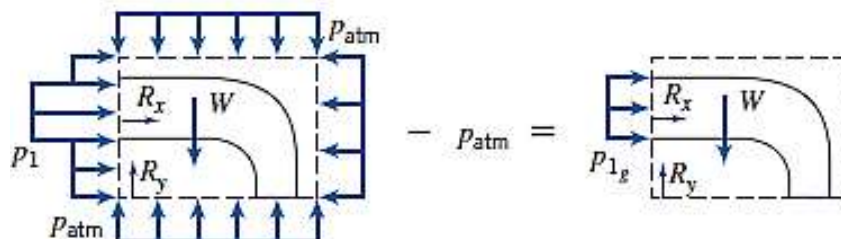


▪ مطابق شکل، از آن جا که فشار اتمسفر بر روی تمام

نقاط سطح کنترل وارد می شود، می توان از تمام مقادیر

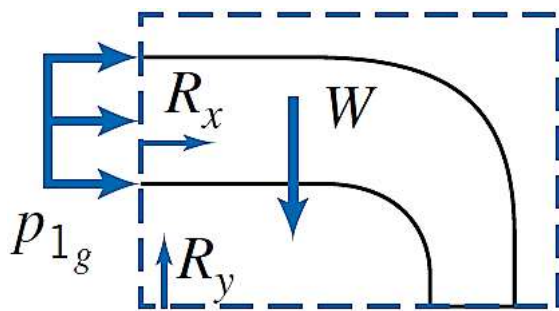
فشار مطلق، فشار اتمسفر را کم کرده و با فشار نسبی کار

کنیم. پس داریم:



166

حل



فرضیات لازم:

- جریان یکنواخت در هر مقطع
- فشار اتمسفر (مطلق) ۱۰۱ kpa
- جریان تراکم ناپذیر
- جریان پایا

- از وزن زانویی و سیال درون آن صرف نظر می کنیم.

$$\sum F_{system} = \frac{d\vec{P}}{dt} \bigg|_{system} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

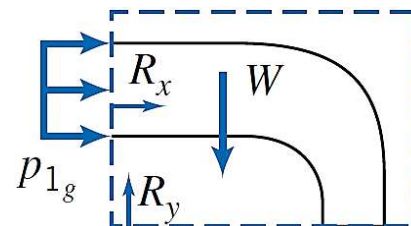
■ در جهت x داریم

$$F_{S_x} = \int_{CS} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow p_{1g} A_1 + R_x = \int_{A_1} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

167

حل

$$\begin{aligned} R_x &= -p_{1g} A_1 + \int_{A_1} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ &= -p_{1g} A_1 + u_1 (-\rho V_1 A_1) \\ \Rightarrow R_x &= -p_{1g} A_1 - \rho V_1^2 A_1 \end{aligned}$$



■ سرعت در مقطع ۱ داده نشده است. اما طبق معادله پیوستگی می توان نوشت:

$$(-\rho V_1 A_1) + (\rho V_2 A_2) = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 16 \frac{m}{s} \times \frac{0.0025}{0.01} = 4 m/s$$

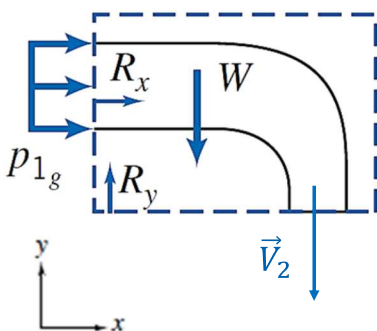
■ در نتیجه R_x برابر است با:

$$\begin{aligned} R_x &= -p_{1g} A_1 - \rho V_1^2 A_1 \\ &= -1.19 \times 10^5 \frac{N}{m^2} \times 0.01 m^2 - 999 \frac{kg}{m^3} \times 16 \frac{m^2}{s^2} \times 0.01 m^2 \times \frac{N \cdot s^2}{kg \cdot m} \end{aligned}$$

$$R_x = -1.35 kN$$

168

حل



با نوشتن معادله اندازه حرکت در جهت y داریم:

$$F_{S_y} + F_{B_y} = R_y + F_{B_y} = \int_{CS} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow R_y = -F_{B_y} + \int_{A_2} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

و با اعمال فرض تراکم ناپذیر بودن و یکنواخت بودن جریان

$$R_y = -F_{B_y} + v_2(\rho V_2 A_2) \Rightarrow R_y = -F_{B_y} - \rho V_2^2 A_2$$

و با صرفنظر از وزن به عنوان تنها نیروی حجمی وارد بر حجم کنترل داریم:

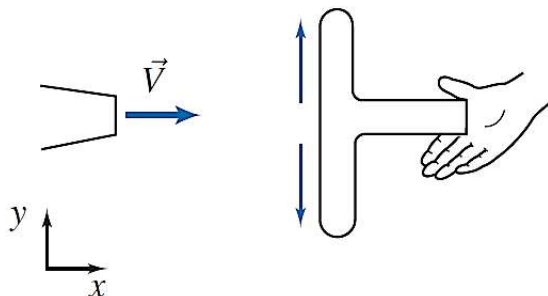
$$R_y = -999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times (16)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times 0.0025 \text{ m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} \Rightarrow R_y = -639 \text{ N}$$

سوال: آیا حل مسأله تمام است؟؟؟

169

مثال

▪ مطابق شکل، جریان آب از یک نازل با سطح مقطع 0.01 m^2 به سمت یک صفحه صاف حرکت می کند. آب نازل را با سرعت یکنواخت 15 m/s ترک می کند. با فرض این که آب به صورت مستقیم به صفحه برخورد کرده و پس از برخورد در امتداد صفحه حرکت می کند، نیروی افقی لازم برای نگه داشتن صفحه را به دست آورید.

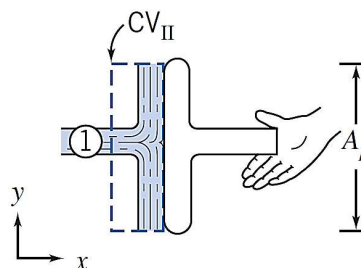
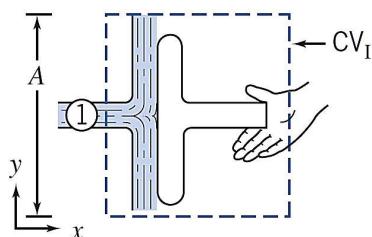


▪ حل: داده های مسأله عبارتند از

$$\text{Jet velocity, } \vec{V} = 15\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\text{Nozzle area, } A_n = 0.01 \text{ m}^2$$

▪ ابتدا باید یک حجم کنترل در نظر بگیریم



170

حل

▪ ابتدا فرضیات به کار رفته در حل مسأله:

- جریان پایا
- سیال تراکم ناپذیر
- جریان یکنواخت در مقاطع ورودی و خروجی
- معادلات بقای جرم و اندازه حرکت در این مسأله به شکل زیر برقرار هستند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

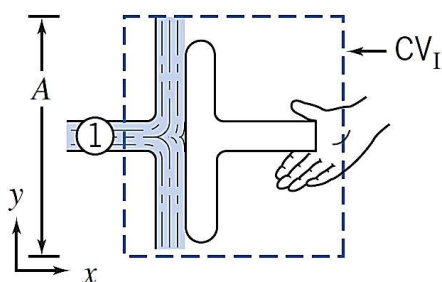
$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{V} \rho dV + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

▪ صرفنظر از حجم کنترل ۱ یا ۲، با اعمال فرضیات به کار رفته، معادلات به شکل زیر خواهند شد:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \sum_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} \quad \sum_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

171

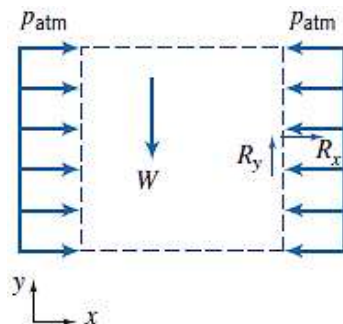
حل



▪ با در نظر گرفتن حجم کنترل ۱:

چون حجم کنترل از دست عبور کرده است، اجزای نیروی وارد از طرف دست به حجم کنترل را به شکل R_x و R_y در نظر می گیریم.

- بدیهی است نیروهای وارد از حجم کنترل بر دست دقیقاً برابر با R_x و R_y و در خلاف جهت آن ها هستند.



با نوشتن معادله اندازه حرکت در جهت x:

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \sum_{CS} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

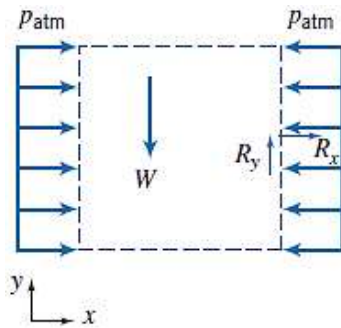
در نتیجه

$$F_{S_x} = \sum_{CS} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

172

حل

■ از آن جا که فشار اتمسفری از هر دو سو وارد می شود:



$$F_{S_x} = p_{atm}A - p_{atm}A + R_x$$

■ در نتیجه داریم

$$R_x = \sum_{CS} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}|_1 = -u_1 \rho V_1 A_1$$

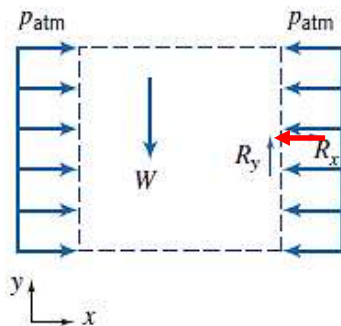
■ سرعت در مقطع ۱ برابر است با:

$$u_1 = V_1 = 15 \text{ m/s}$$

173

حل

■ در نتیجه



$$R_x = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.01 \text{ m}^2 \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$R_x = -2.25 \text{ kN}$$

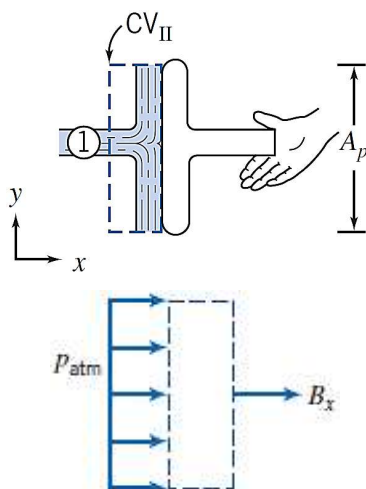
■ با در نظر گرفتن حجم کنترل دوم

سطوح سمت راست و چپ حجم کنترل برابر با سطح صفحه هستند (A_p).

از سمت راست، حجم کنترل مماس با تمام نقاط صفحه است.

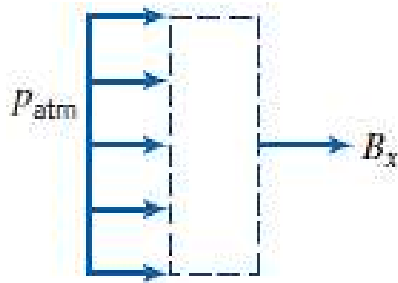
در نتیجه نیروی افقی وارد از صفحه بر حجم کنترل را B_x

می نامیم (با فرض در جهت مثبت).



174

حل



با نوشتن معادله اندازه حرکت در جهت x و ساده سازی:

$$F_{S_x} = \sum_{CS} u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}$$

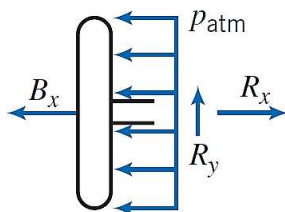
در نتیجه

$$\begin{aligned} F_{S_x} &= p_{atm} A_p + B_x = u \rho \vec{V} \cdot \vec{A}|_1 \\ &= -u_1 \rho V_1 A_1 = -2.25 \text{ kN} \end{aligned}$$

پس B_x برابر است با:

$$B_x = -p_{atm} A_p - 2.25 \text{ kN}$$

برای تعیین نیروی خالص وارد بر صفحه باید شماتیکی از صفحه به شکل زیر در نظر بگیریم:



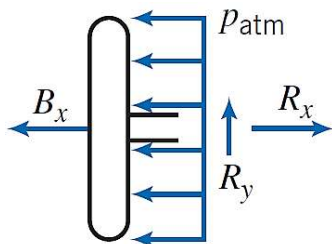
چون صفحه ثابت است می توان نوشت:

$$\sum F_x = 0 = -B_x - p_{atm} A_p + R_x$$

175

حل

پس



$$R_x = p_{atm} A_p + B_x$$

$$R_x = p_{atm} A_p + (-p_{atm} A_p - 2.25 \text{ kN}) = -2.25 \text{ kN}$$

در هر دو حالت، R_x نیروی وارد بر حجم کنترل از طرف دست (حالت اول) و صفحه (حالت دوم) بود. در نتیجه نیروی وارد بر دست (حالت اول) و صفحه (حالت دوم) از طرف حجم کنترل برابر خواهد بود با:

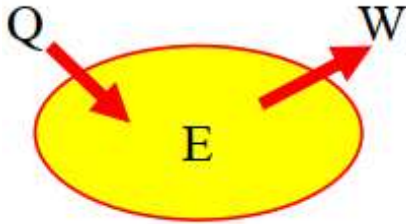
$$K_x = -R_x = 2.25 \text{ kN}$$

سوال: کدام حجم کنترل برای حل مسأله بهتر بود؟؟؟

176

قانون اول ترمودینامیک

■ بیان قانون



$$\delta Q - \delta W = dE$$

■ که در آن،

δQ = heat added to the system from surroundings

δW = work done by the system on its surroundings

dE = increase in energy of the system

■ با تقسیم رابطه بر dt

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow \dot{Q} - \dot{W} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{system}}$$

177

معادله انرژی

■ در شرایطی که بخواهیم کار یا گرمای تبادل یافته را محاسبه کنیم:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{sys}} e \rho dV$$

در نتیجه

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{\text{c.v.}} e \rho dV + \int_{\text{c.s.}} e \rho \hat{n} \cdot \mathbf{V} dA$$

■ که در این حالت، $\eta = e = \frac{E}{m}$ و E همان انرژی کل یک سیستم می باشد. شامل انرژی

داخلی، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل

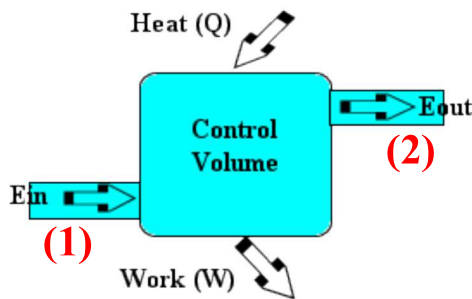
$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

■ وقتی اثرات ویسکوزیته (نیروهای برشی) قابل صرف نظر کردن باشند، از معادله انرژی برای ارتباط بین سرعت و فشار سیال نیز می توان استفاده کرد.

178

معادله انرژی

First Law for Steady Flow System



■ در حالت کلی:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_{c.v.} e \rho dV + \int_{c.s.} e \rho \hat{n} \cdot V dA$$

■ در حالت پایا و در صورتی که جریان در ورودی و خروجی یکنواخت باشد:

$$\dot{Q} - \dot{W} = e_2 \rho_2 V_2 A_2 - e_1 \rho_1 V_1 A_1$$

سوال: دلیل علامت منفی در مقطع ۱ چیست؟؟؟

■ با به کارگیری معادله پیوستگی

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

■ در نتیجه

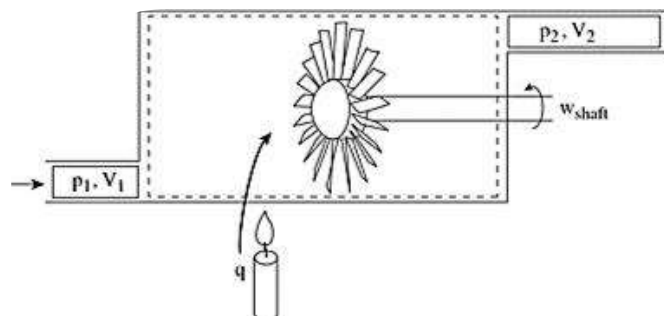
$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}(e_2 - e_1)$$

179

محاسبه کار

■ ترم نرخ کار ($\dot{W}$) ناشی از نیروی جابجا شده (F) با سرعت V می باشد. نیرو می تواند فشار یا تنش ضربدر سطح باشد. اگر جریان در یک مجرا (مانند لوله یا کانال) باشد، دیواره ها حرکت نمی کنند و هیچ کاری توسط دیواره ها انجام نمی شود.

■ اگر یک نقاله متحرک وجود داشته باشد، بدلیل تنش بین نقاله و سیال، کار ورودی به سیستم خواهیم داشت.



■ رایج ترین نرخ کار ناشی از نیروهای فشاری یکنواخت در ورودی و خروجی و از هر وسیله ای بین ورودی و خروجی می باشد.

■ در نتیجه، ترم نرخ کار برابر است با:

$$\dot{W} = p_2 A_2 V_2 - p_1 A_1 V_1 + \dot{W}_s$$

180

معادله انرژی

- توان خروجی مثبت در نظر گرفته شده و $\dot{W}_s$ توان خروجی محور از حجم کنترل می باشد.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt}_{\text{system}}$$

- در نتیجه در معادله، پمپ توان منفی ایجاد کرده و توربین توان مثبت ایجاد می کند.
- قبلاً دیدیم انرژی یک سیال شامل انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی درونی می باشد:

$$E = m \left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \right)$$

- با استفاده از عبارت بالا

$$\dot{Q} - p_2 A_2 V_2 + p_1 A_1 V_1 - \dot{W}_s = \dot{m} \left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \tilde{u}_2 - \frac{V_1^2}{2} - gz_1 - \tilde{u}_1 \right)$$

181

معادله انرژی

- افت انرژی می تواند ناشی از عواملی مانند اصطکاک (تغییر انرژی داخلی) و یا انتقال گرما از سیستم باشد.

- با در نظر گرفتن اتلاف ها به عنوان h_L و تقسیم معادله حاصل بر $\dot{m}g$ داریم:

$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 - \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + h_L$$

- که در این معادله به h_L افت هد گفته می شود:

$$h_L = \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{g} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}g}$$

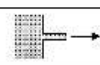
- معمولاً افت هد به شکل زیرو به کمک ضریب افت K بیان می شود:

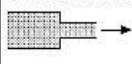
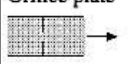
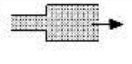
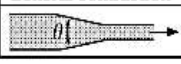
$$h_L = K \frac{V^2}{2g} \Rightarrow -\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 - \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + K \frac{V^2}{2g}$$

- اگر افت انرژی نداشته باشیم و کاری از سیال گرفته یا به آن داده نشود؟؟؟

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1$$

182

Type of fitting diameter		Screwed			Flanged		
		2.5 cm	5 in.	10 cm	5 cm	10 cm	20 cm
Globe valve (fully open)		8.2	6.9	5.7	8.5	6.0	5.8
(half open)		20	17	14	21	15	14
(one-quarter open)		57	48	40	60	42	41
Angle valve (fully open)		4.7	2.0	1.0	2.4	2.0	2.0
Swing check valve (fully open)		2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0
Gate valve (fully open)		0.24	0.16	0.11	0.35	0.16	0.07
Return bend		1.5	0.95	0.64	0.35	0.30	0.25
Tee (branch)		1.8	1.4	1.1	0.80	0.64	0.58
Tee (line)		0.9	0.9	0.9	0.19	0.14	0.10
Standard elbow		1.5	0.95	0.64	0.39	0.30	0.26
Long sweep elbow		0.72	0.41	0.23	0.30	0.19	0.15
45° elbow		0.32	0.30	0.29			
Square-edged entrance				0.5			
Reentrant entrance				0.8			
Well-rounded entrance				0.03			
Pipe exit				1.0			

	Area ratio				
Sudden contraction [†] 	2:1		0.25		
	5:1		0.41		
	10:1		0.46		
Orifice plate 	Area ratio A/A_0				
	1.5:1		0.85		
	2:1		3.4		
	4:1		29		
	≥6:1		$2.78 \left(\frac{A}{A_0} - 0.6 \right)^2$		
Sudden enlargement [‡] 			$\left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$		
90° miter bend (without vanes) 			1.1		
(with vanes) 			0.2		
General contraction (30° included angle) 			0.02		
(70° included angle)			0.07		

*Values for other geometries can be found in *Technical Paper 410*. The Crane Company, 1957.

[†]Based on exit velocity V_2 .

[‡]Based on entrance velocity V_1 .

مثال

- آب از یک مخزن با ارتفاع ۳۰ متر از درون یک لوله ۵ سانتی متری که دارای یک نازل ۲ سانتی متری است خارج می شود. ضریب افت لوله ۱/۲ می باشد.

الف: دبی جرمی آب از درون لوله را تخمین بزنید.

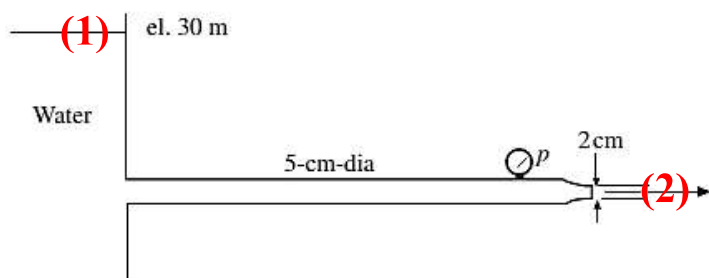
ب: فشار جریان ورودی به نازل را تعیین کنید.

ارتفاع نازل ۱۰ متر می باشد.

حل:

الف: با نوشتن معادله انرژی

بین نقاط (۱) و (۲)



$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 - \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + K \frac{V^2}{2g}$$

185

حل

- فشار در سطح ۱ و ۲ برابر با فشار اتمسفر می باشد.

- سرعت در سطح ۱ ناچیز در نظر گرفته شده و هیچ کار محوری در سیستم وجود ندارد.

$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 - \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{V_1^2}{2g} - z_1 + K \frac{V^2}{2g}$$

- در ترم افت انرژی باید سرعت سیال در لوله قرار داده شود. به کمک معادله پیوستگی:

$$V_2 A_2 = V A \Rightarrow V = V_2 \frac{A_2}{A} = V_2 \left(\frac{D_2}{D} \right)^2 = \frac{4}{25} V_2$$

- در نتیجه

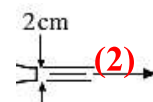
$$0 = \frac{V_2^2}{2g} + 10 - 30 + 1.2 \times \left(\frac{4}{25} \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} \quad \therefore V_2 = 19.5 \text{ m/s}$$

بخش الف حل شد؟

ب: با نوشتن معادله انرژی بین ورودی و خروجی نازل

$$0 = \frac{19.5^2}{2 \times 9.81} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \left(\frac{4}{25} \right)^2 \frac{19.5^2}{2 \times 9.8} - \frac{p}{9810} - z_1$$

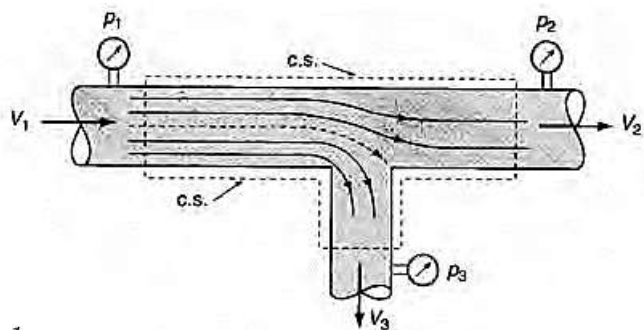
$$p = 185\,300 \text{ Pa} \quad \text{or} \quad 185.3 \text{ kPa}$$



186

حالت های خاص

■ در جریان در یک سه راهی (چند ورودی و خروجی)



$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{f1-2}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + h_{f1-3}$$

187

حالت های خاص

■ در صورت وجود پمپ و توربین در مسیر سیال، کار محوری وجود خواهد داشت که به شکل زیر جایگزین می شود:

$$\frac{\dot{W}_s}{\dot{m} g} = \frac{\dot{W}_T - \dot{W}_P}{\dot{m} g} = h_T - h_P$$

■ در نتیجه

$$h_P + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = h_T + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f$$

■ قبلاً برای ترم اتلاف داشتیم

$$h_f = K \frac{V^2}{2g}$$

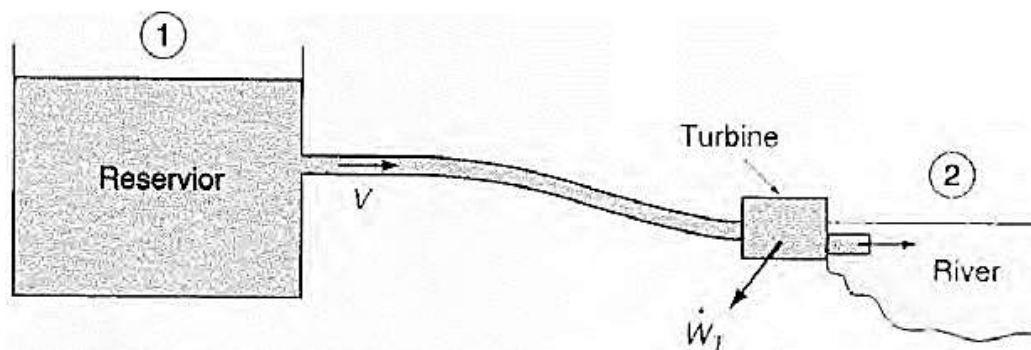
■ و در نهایت

$$\frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} + \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2g} + (z_2 - z_1) = h_P - h_T - K \frac{V^2}{2g}$$

188

مثال

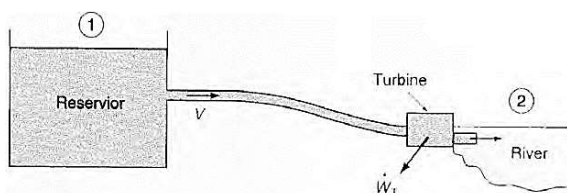
- مطابق شکل، جریان آب درون یک مخزن از طریق یک لوله با قطر ۰/۸ متر به سمت یک رودخانه جریان دارد. سطح آب در مخزن ۳۰ متر بالاتر از سطح رودخانه است. شدت جریان آب $3 \text{ m}^3/\text{s}$ و بازده توربین ۸۰٪ می باشد. توان توربین را محاسبه نمایید. ضریب اتلاف انرژی در لوله (K) برابر با ۲ می باشد.



189

حل

- ابتدا محاسبه سرعت آب در لوله:



$$V = \frac{Q}{A} = \frac{3}{\pi \times 0.8^2 / 4} = 5.968 \text{ m/s}$$

- با نوشتن معادله انرژی بین نقطه (۱) و (۲)

$$h_p + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = h_T + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + K \frac{V^2}{2g}$$

- در نتیجه

$$30 = h_T + 2 \frac{5.968^2}{2 \times 9.81} \Rightarrow h_T = 26.4 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_T &= \rho g h_T Q \eta_T = 1000 \times 9.81 \times 26.4 \times 3 \times 0.8 \\ &= 622000 \text{ W} = 622 \text{ kW} \end{aligned}$$

190



حل تمرین شکل انتگرالی معادلات حرکت سیال

یادآوری

■ قضیه انتقال رینولدز

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{CV}} \eta \rho dV + \int_{\text{CS}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

■ در حالت پایا

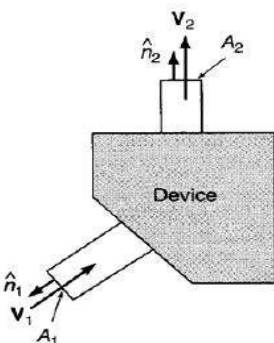
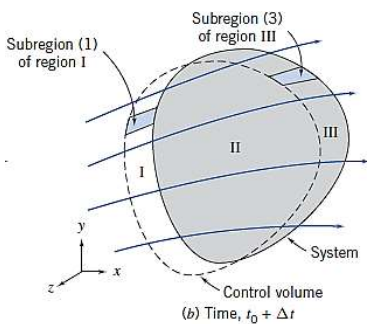
$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta \rho) = 0$$

$$\frac{DN_{\text{sys}}}{Dt} = \int_{\text{c.s.}} \eta \rho \hat{n} \cdot \vec{v} dA$$

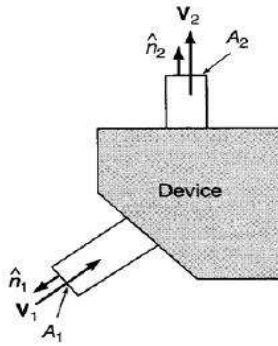
■ اگر فقط یک ورودی و یک خروجی داشته باشیم:

(با فرض مقادیر ثابت)

$$\frac{DN_{\text{sys}}}{Dt} = \eta_2 \rho_2 v_2 A_2 - \eta_1 \rho_1 v_1 A_1$$



یادآوری

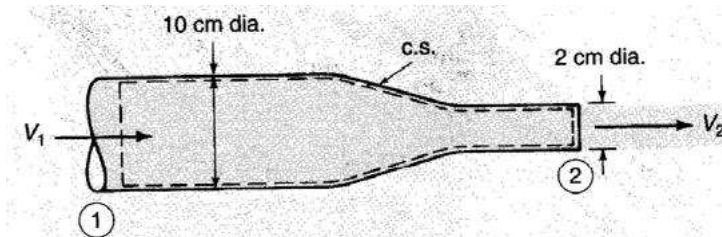


▪ با فرض جرم به عنوان خاصیت گسترده، در حالت پایا و در صورتی که سرعت و دانسیته در ورودی و خروجی ثابت باشد:

$$\sum_{CS} \rho \vec{V} \cdot \vec{A} = (\rho \vec{V} \cdot \vec{A})_1 + (\rho \vec{V} \cdot \vec{A})_2 = -\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = 0$$

▪ و یا

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$



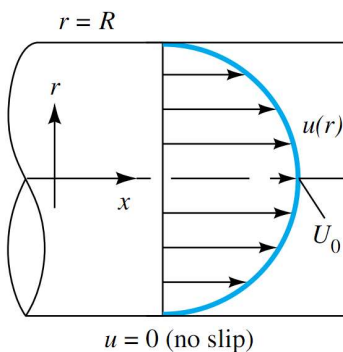
▪ مثال کلاس

▪ V_2 و Q ؟؟؟

193

مثال

▪ برای توزیع سرعت زیر، معادله سرعت داده شده است. برای جریان آرام، مقدار $m \approx 0.5$ و برای جریان درهم، $m \approx 0.143$ می باشد. در صورتی که دانسیته ثابت باشد، سرعت متوسط در جریان را برای حالت پایا تعیین نمایید.



$$u = U_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)^m$$

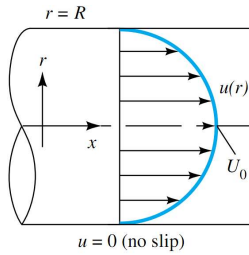
حل: می دانیم

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_{\text{syst}} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

در حالتی که ورودی های یک بعدی در جریان داشته باشیم:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{out}} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{in}} = 0$$

194



حل

در نتیجه می توان گفت

$$\sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{in}} = \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{out}} \Rightarrow \sum_i (\dot{m}_i)_{\text{out}} = \sum_i (\dot{m}_i)_{\text{in}}$$

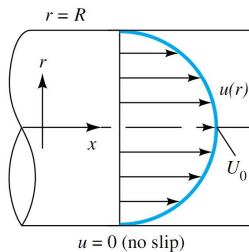
برای مایع تراکم ناپذیر می توان نوشت

$$\sum_i (V_i A_i)_{\text{out}} = \sum_i (V_i A_i)_{\text{in}} \Rightarrow \sum Q_{\text{out}} = \sum Q_{\text{in}}$$

برای این حالت داریم

$$Q_{\text{CS}} = \int_{\text{CS}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \Rightarrow V_{\text{av}} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

195



حل

در نتیجه برای این جریان در لوله می توان گفت

$$V_{\text{av}} = \frac{1}{A} \int u dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R U_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^m 2\pi r dr$$

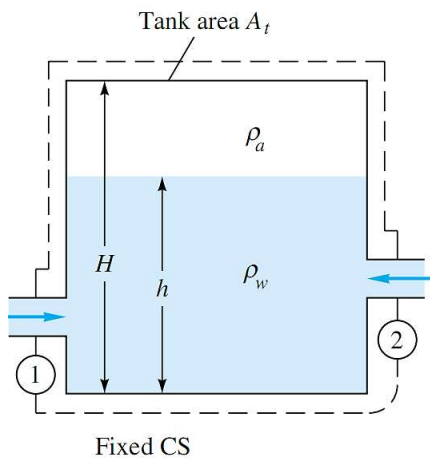
و در نهایت

$$V_{\text{av}} = U_0 \frac{2}{(1+m)(2+m)}$$

196

مثال

■ مطابق شکل، آب (۲۰ °C) به مخزنی با دو ورودی وارد می شود. هوا در بالای مخزن به دام افتاده و ارتفاع آب برابر با h می باشد. مطلوبست: (الف) رابطه ای برای تغییر ارتفاع آب در مخزن به دست آورید. (ب) مقدار dh/dt را برای شرایط زیر تعیین کنید. $D_1 = 1$ in, $D_2 = 3$ in, $V_1 = 3$ ft/s, $V_2 = 2$ ft/s, and $A_t = 2$ ft².

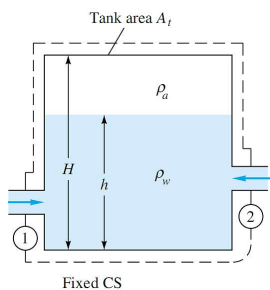


حل: (الف) طبق قضیه انتقال رینولدز داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \rho dV \right) - \rho_1 A_1 V_1 - \rho_2 A_2 V_2 = 0$$

197



حل

در نتیجه می توان گفت

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{CV} \rho dV \right) = \frac{d}{dt} (\rho_w A_t h) + \frac{d}{dt} [\rho_a A_t (H - h)] = \rho_w A_t \frac{dh}{dt}$$

برای مایع تراکم ناپذیر

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2}{\rho_w A_t} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{A_1 V_1 + A_2 V_2}{A_t} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_t}$$

$$Q_1 = A_1 V_1 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{1}{12} \text{ ft} \right)^2 (3 \text{ ft/s}) = 0.016 \text{ ft}^3/\text{s}$$

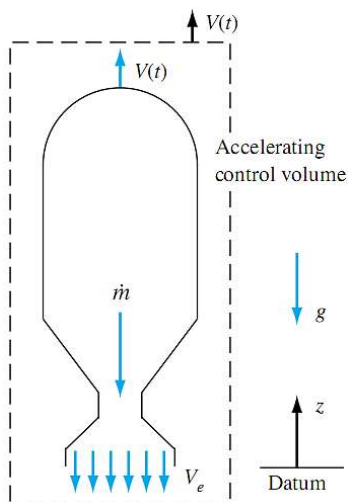
(ب) می توان نوشت

$$\frac{dh}{dt} =$$

و در نهایت

198

- مطابق شکل، برای یک موشک با جرم M_0 و دبی جریان خروجی از موشک برابر با $\dot{m}$ و سرعت خروجی گاز V_e ، اگر جریان گاز پایا بوده و از مقاومت هوا صرفنظر شود، رابطه ای برای سرعت حرکت عمودی موشک به دست آورده و با استفاده از شرایط $V=0$ at $t=0$ ، آن را ساده نمایید.



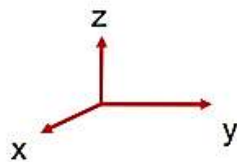
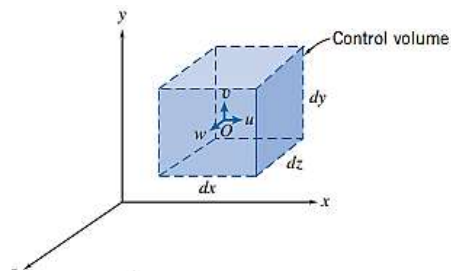
شکل دیفرانسیلی معادلات حرکت

معادله پیوستگی

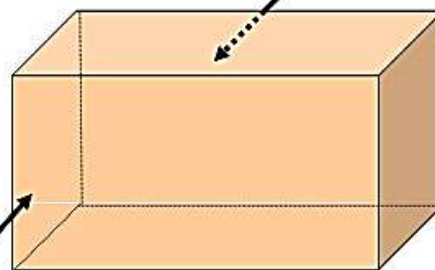
$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} M_{element}$$

دانشیه مرکز حجم کنترل در نقطه O: ρ

سرعت در نقطه O: $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$



$$\left(\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \frac{dx}{2} \right) dz dy$$



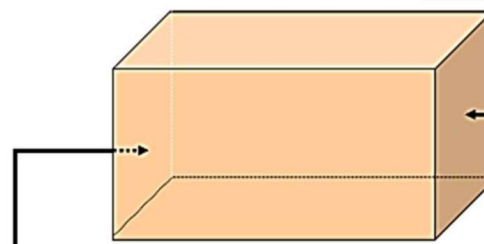
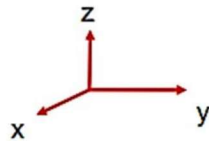
$$\left(\rho v_x - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \frac{dx}{2} \right) dz dy$$

201

معادله پیوستگی

■ در جهت y

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} M_{element}$$



$$\left(\rho v_y - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) \frac{dy}{2} \right) dz dx$$

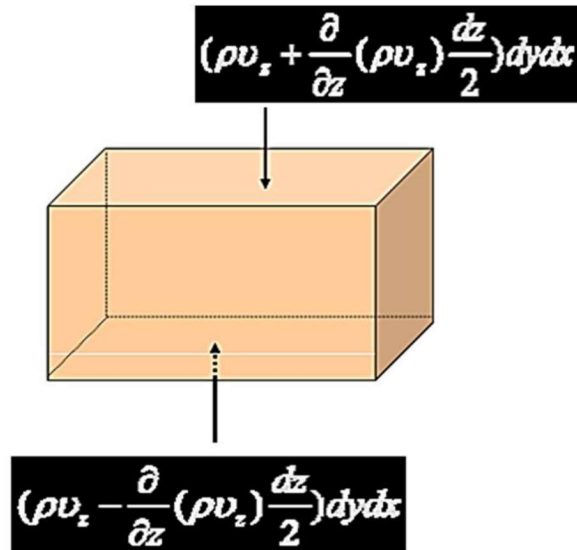
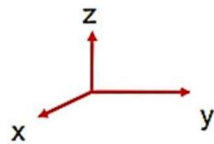
$$\left(\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) \frac{dy}{2} \right) dz dx$$

202

معادله پیوستگی

■ در جهت Z

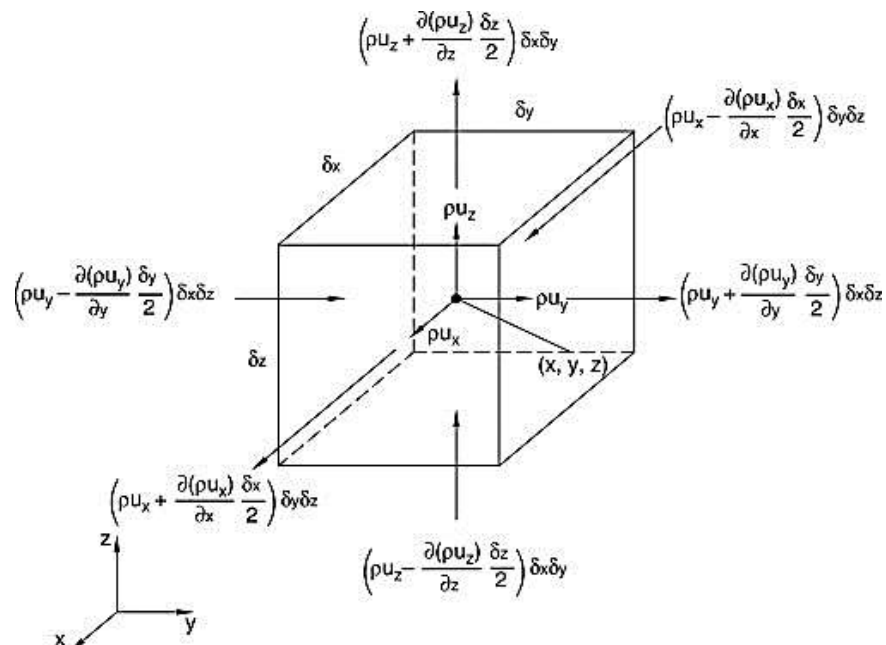
$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} M_{element}$$



203

معادله پیوستگی

■ با نوشتن دبی جرمی ورودی و خروجی بر روی تمام سطوح می توان نوشت:



204

معادله پیوستگی

■ برای تمام جهات می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \left[\rho V_x - \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz - \left[\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz \\ & + \left[\rho V_y - \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz - \left[\rho V_y + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz \\ & + \left[\rho V_z - \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy - \left[\rho V_z + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \\ & \div dx dy dz \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

205

معادله پیوستگی

■ در حالتی که سیال تراکم پذیر باشد ($\rho \neq cte$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

■ با استفاده از تعریف مشتق کلی:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

(معادله پیوستگی در فرم دیفرانسیلی)

طبق تعریف گرادیان:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

که در آن:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

206

معادله پیوستگی

■ در حالتی که سیال تراکم ناپذیر باشد ($\rho = cte$):

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot V = 0$$

(معادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر)

□ در مختصات کارتزین:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

□ در مختصات استوانه ای:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

□ در مختصات کروی:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0$$

207

معادله اندازه حرکت

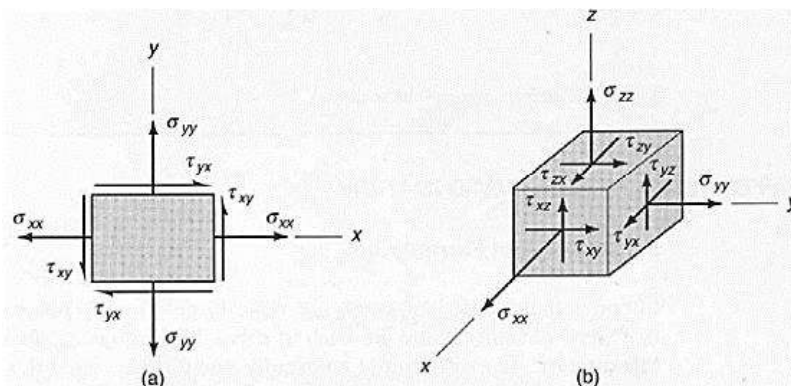
■ برای تعیین پروفیل سرعت، تنها معادله پیوستگی کفایت نمی کند. زیرا سرعت

در ۳ جهت مجهول است، اما فقط یک معادله پیوستگی داریم.

■ از آن جا که اندازه حرکت یک کمیت برداری است، معادله آن دارای سه مولفه

بوده و در پیدا کردن پروفیل سرعت و فشار کاملاً کارا می باشد.

□ انواع تنش

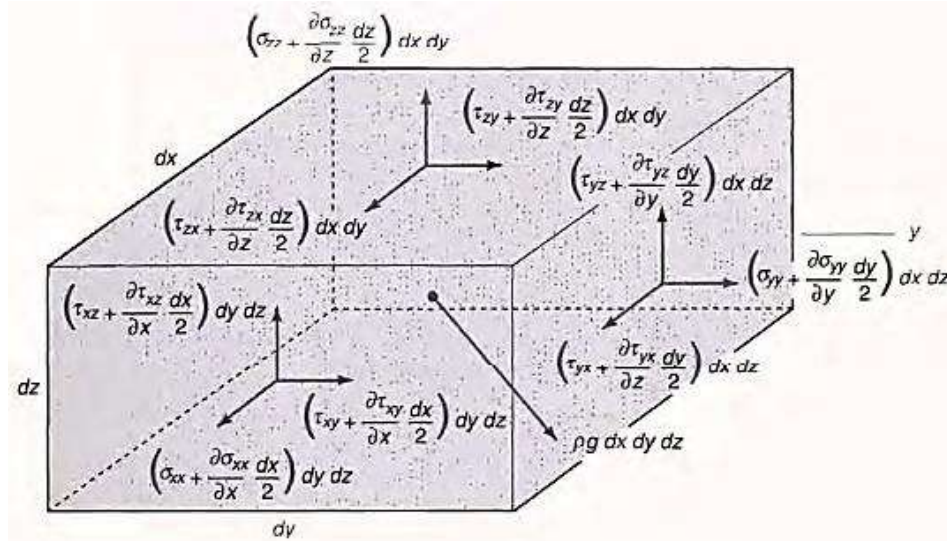


جهت نیرو τ_{xy} تنش برشی
سطحی که نیرو روی آن اثر می کند

208

معادله اندازه حرکت

■ پس، برای یک المان سیال، نیروهای وارد بر سطح را به شکل زیر می توان نوشت:

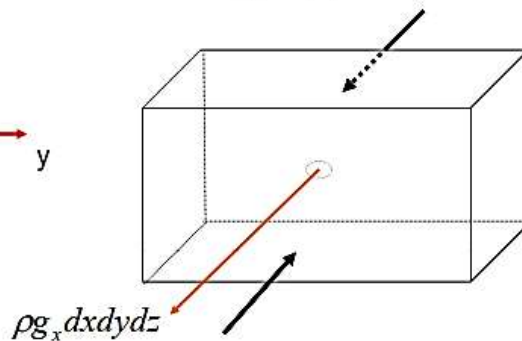
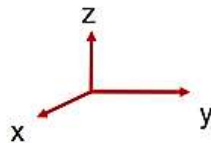


209

معادله اندازه حرکت

■ در جهت X

$$\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz + \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$$

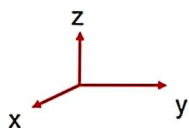


$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$$

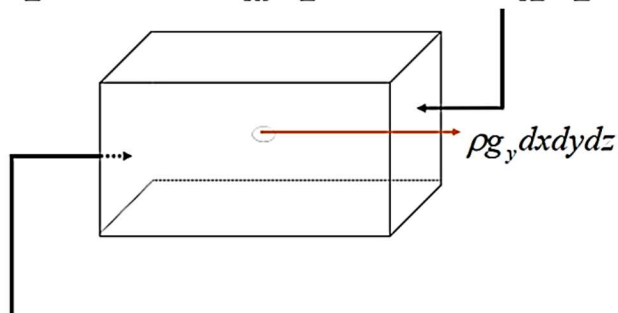
210

معادله اندازه حرکت

■ در جهت y



$$\left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx$$



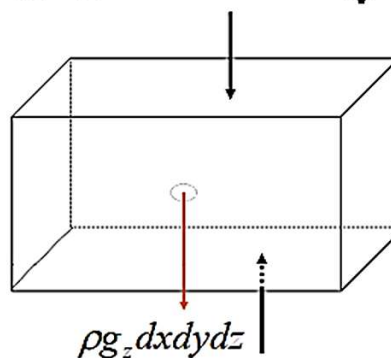
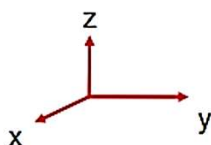
$$\left(\sigma_{yy} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx + \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(\tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx$$

211

معادله اندازه حرکت

■ در جهت z

$$\left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx$$

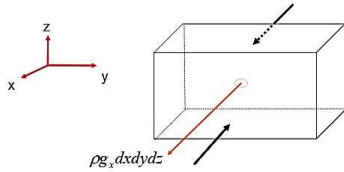


$$\left(\sigma_{zz} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dy dx + \left(\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dz dy + \left(\tau_{yz} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dz dx$$

212

معادله اندازه حرکت

$$(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz + (\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}) dx dz + (\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy$$



$$(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2}) dy dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}) dx dz + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2}) dx dy$$

■ با نوشتن قانون دوم نیوتن در جهت x

برای المان داریم:

$$\sum F_x = m a_x$$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ & - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx dy + \rho g_x dx dy dz \\ & = \rho dx dy dz \frac{DV_x}{Dt} \end{aligned}$$

213

معادله اندازه حرکت

■ پس از ساده سازی و تقسیم عبارت بر $dx dy dz$ داریم:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

■ به همین شکل برای جهت های y و z:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$$

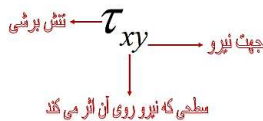
$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

214

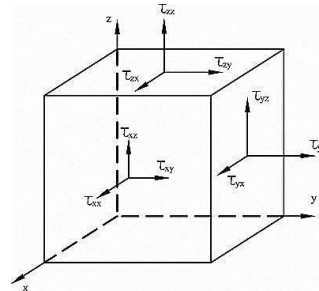
تعریف تانسور

■ کمیت هایی هستند که در دو جهت تغییر می کنند، مانند تنش.

■ این کمیت ها از نوع تانسور هستند (و نه بردار).



$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



■ تانسور تنش متقارن است، به این معنی که:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

■ معمولاً تنش قائم را از فشار تفکیک می کنند:

$$\sigma_{xx} = -P + \tau_{xx}$$

215

معادله اندازه حرکت

■ در نتیجه معادله در جهت x به شکل زیر خواهد شد:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

■ این کار را برای جهات y و z هم می توان انجام داد.

■ بنابراین به شکل کلی می توان نوشت:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho g$$

↓ ↓ ↓ ↓
 نیروی جاذبه بر واحد حجم سیال نیروی ویسکوز بر واحد حجم سیال نیروی فشار بر واحد حجم سیال جرم سیال در واحد حجم ضرب در شتاب

216

معادله اوایلر

■ در صورتی که جریان غیرویسکوز باشد (یا از اثرات ویسکوزیته صرفنظر شود):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (\tau_{ij}=0)$$

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (\text{فرم کلی معادله اوایلر})$$

معادله را در ۳ جهت می توان به شکل زیر نوشت:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

217

معادله اوایلر

■ در صورتی که دانسیته ثابت و جریان پایا (در جهت z) باشد:

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = \rho \left(\cancel{\frac{\partial V_z}{\partial t}} + \cancel{V_x} \frac{\partial V_z}{\partial x} + \cancel{V_y} \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\Rightarrow \rho V \frac{dV}{dz} = -\frac{dP}{dz} - \rho g \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = cte \quad (\text{معادله برنولی})$$

□ با داشتن معادله مومنتم (در ۳ جهت) و معادله پیوستگی، ۴ معادله داریم و ۴ مجهول $V_x, V_y,$

V_z, P به دست خواهند آمد

218

معادلات ناویه استوکس (Navier-stokes)

در حالتی که:

الف) سیال نیوتنی باشد، مانند هوا، آب، روغن (رابطه خطی بین تنش و گرادیان سرعت)

ب) سیال ایزوتروپیک باشد، به این معنا که خواص سیال در همه جهات یکسان بوده و تغییر نمی کند.

219

معادلات ناویه استوکس (Navier-stokes)

با اعمال این فرضیات، معادلات اندازه حرکت به شکل زیر به دست می آیند:

■ در جهت x

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

■ در جهت y

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

■ در جهت z

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

220

معادلات ناویه استوکس (Navier-Stokes)

■ در صورتی که سیال تراکم ناپذیر با ویسکوزیته ثابت باشد:

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

■ معادلات بالا، معادلات ناویه استوکس نام دارند و به شکل برداری زیر نشان داده می شوند:

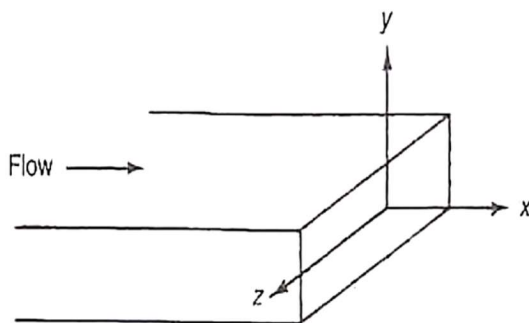
$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

221

مثال

■ برای سیستم مقابل، معادلات ناویه-استوکس را برای جهات مختلف به کار ببرید. حرکت سیال (آب) تنها در جهت x می باشد. جریان را توسعه یافته و آرام در نظر بگیرید.

■ حل:



➤ به دلیل جریان آرام، خطوط جریان

موازی هستند.

➤ فرضیات سیال نیوتنی و ایزوتروپیک

برقرارند.

$$V_y = V_z = 0$$

جریان تنها در جهت x است.

تغییرات سرعت در جهت y و z اتفاق می افتد.

$$V_x = V_x(y, z)$$

222

▪ طبق تعریف شتاب کلی می دانیم:

$$\frac{DV_x}{Dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_x}{\partial t}$$

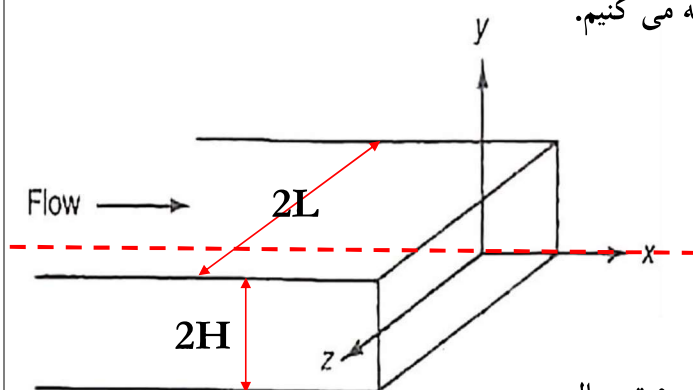
▪ با استفاده از معادله ناویه-استوکس در جهت x (سیال تراکم ناپذیر و ویسکوزیته ثابت):

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

▪ برای ادامه حل، نیاز به شرایط مرزی داریم (دو شرط در جهت y و دو شرط در جهت z)

▪ علاوه بر شرایط مرزی، نیاز به یک شرط اولیه هم داریم. اطلاعات تغییرات فشار در جهت x نیز مورد نیاز است.

▪ برای تعیین شرایط، به سیستم مورد مطالعه توجه می کنیم.



▪ از آن جا که مبدأ مختصات در مرکز کانال در نظر گرفته شده است:

فرض عدم لغزش یا No slip condition:

جریان سیال در کنار دیواره ها لغزشی نداشته و سرعت سیال در این نقاط برابر با سرعت دیواره می باشد.

در نتیجه در جهت y:

$$V_x(-H, z) = 0 \quad V_x(+H, z) = 0$$

در جهت z:

$$V_x(y, -L) = 0 \quad V_x(y, +L) = 0$$

■ در جهت y:

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$

در نتیجه

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \Rightarrow P(y) = P_0 - \rho g y$$

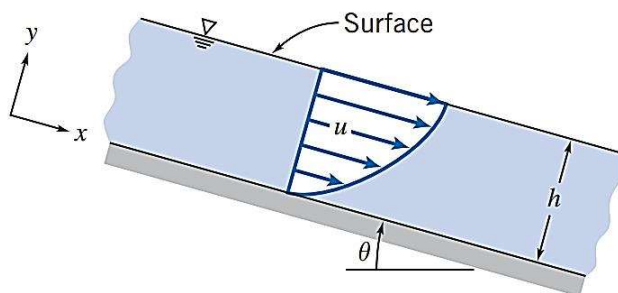
■ در جهت z:

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

در نتیجه

مثال: جریان فیلم نازک از روی سطح شیب دار

■ نشان دهید در سیستم مقابل، تعیین پروفیل سرعت سیال (آب) به شکل زیر می باشد:



$$u = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left[hy - \frac{y^2}{2} \right]$$

جریان آرام و در جهت x بدون شتاب می باشد.

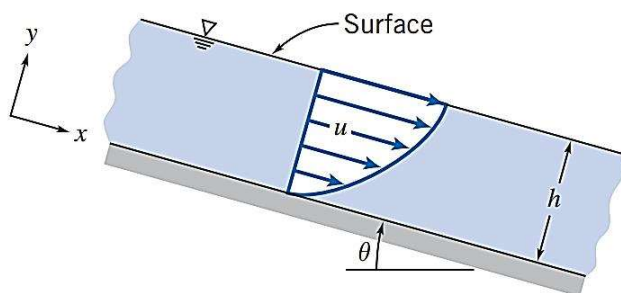
■ حل: سیال نیوتنی، تراکم ناپذیر و ویسکوزیته ثابت است.

$$V_x = V_x(y)$$

■ با نوشتن معادله ناویه-استوکس در جهت x داریم:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

▪ به دلیل نازک بودن فیلم سیال، فشار در تمام نقاط سیال ثابت و برابر با فشار اتمسفر می باشد:



▪ با نوشتن معادله ناویه-استوکس در جهت x:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

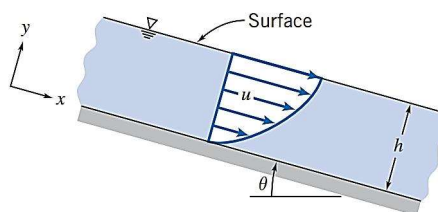
$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right)$$

▪ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 V_x}{dy^2} + \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} = 0$$

▪ نیاز به دو شرط مرزی در جهت y داریم:

$$\begin{cases} B.C. 1: & y = 0 & ; & V_x = 0 \\ B.C. 2: & y = h & ; & \frac{dV_x}{dy} = 0 \end{cases}$$



▪ با دو بار انتگرال گیری می توان به معادله توزیع سرعت رسید:

▪ با اعمال B.C. 2 خواهیم داشت:

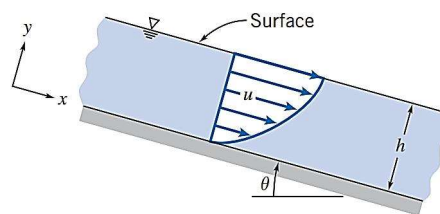
$$\frac{dV_x}{dy} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + c_1$$

■ در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{dV_x}{dy} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} (h - y)$$

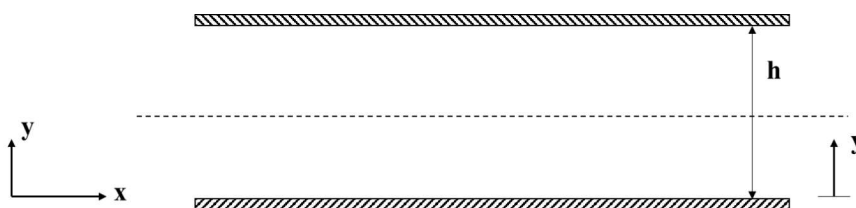
■ با انتگرال گیری مجدد از این معادله داریم:

■ و در نهایت می توان نوشت:



تمرین در کلاس

■ برای جریان آب بین دو صفحه ساکن و موازی نشان دهید معادله توزیع سرعت جریان پایا به شکل زیر است:



■ فرضیات مورد استفاده در مسئله را هم قید کنید.

$$V_x = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) [y^2 - hy]$$



حل تمرین شکل دیفرانسیلی معادلات حرکت سیال

یادآوری: معادله پیوستگی

■ در حالتی که سیال تراکم پذیر باشد $(\rho \neq cte)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

■ با استفاده از تعریف مشتق کلی:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

(معادله پیوستگی در فرم دیفرانسیلی)

طبق تعریف گرادیان:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

که در آن:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

یادآوری: معادله پیوستگی

■ در حالتی که سیال تراکم ناپذیر باشد ($\rho = cte$):

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot V = 0$$

(معادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر)

□ در مختصات کارتزین:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

□ در مختصات استوانه ای:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

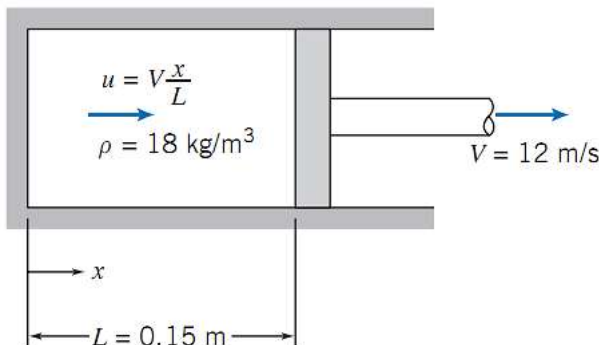
□ در مختصات کروی:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0$$

233

مثال

■ در یک سیستم ثابت سیلندر و پیستون (با طول $L=0.15$ m)، دانسیته گاز محبوس برابر با $\rho=18$ kg/m³ می باشد. مطابق با شکل، با حرکت پیستون با سرعت $V=12$ m/s، گاز منبسط می شود. سرعت گاز (u) با فاصله از انتهای سیلندر (x) به صورت خطی متناسب است. مطلوبست نرخ تغییر دانسیته گاز با زمان. همچنین رابطه ای برای دانسیته متوسط گاز به عنوان تابعی از زمان به دست آورید.



خواسته های مساله: (الف) نرخ تغییر دانسیته در لحظه

ابتدایی

(ب) یافتن تابع $\rho(t)$

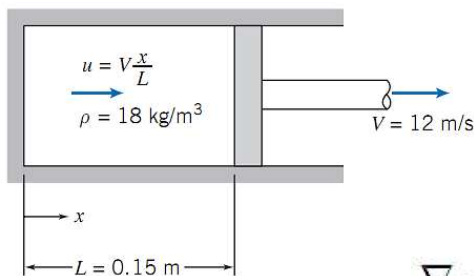
حل: از معادله پیوستگی در فرم دیفرانسیلی استفاده

می کنیم (فصل سوم جلسه ششم):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0$$

234

حل



در نتیجه می توان گفت

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

در مختصات کارتزین داریم

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

و چون $u = u(x)$ ، در نتیجه

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

با مرتب کردن معادله و مشتق گیری داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

235

حل

از آن جا که دانسیته در کل سیلندر یکنواخت می باشد یا $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

از طرفی می دانیم $u = V \frac{x}{L}$ و در نتیجه $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V}{L}$. پس می توان گفت:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = - \int_0^t \frac{V}{L} dt = - \int_0^t \frac{V dt}{L_0 + Vt}$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{L_0}{L_0 + Vt} \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 \left[\frac{1}{1 + Vt/L_0} \right]$$

پس داریم

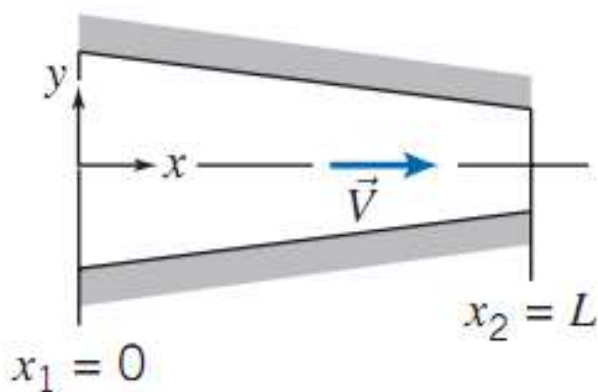
در لحظه $t=0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{V}{L} = -18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{0.15 \text{ m}} = -1440 \text{ kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$$

236

تمرین کلاسی

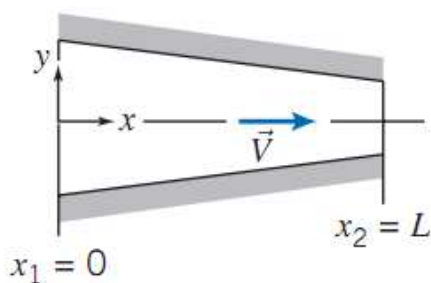
- مطابق شکل، یک جریان دو بُعدی، پایا و تراکم ناپذیر از درون یک کانال همگرا عبور می کند. سرعت سیال بر روی محور x توسط معادله $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$ داده شده است. رابطه ای برای شتاب ذره ای که بر روی محور x حرکت می کند به دست آورید.



راهنمایی: از تعریف شتاب در دیدگاه اویلری استفاده کنید.

237

حل



238

یادآوری: معادلات ناویه استوکس

در حالتی که:

الف) سیال نیوتنی باشد، مانند هوا، آب، روغن (رابطه خطی بین تنش و گرادیان سرعت)

ب) سیال ایزوتروپیک باشد، به این معنا که خواص سیال در همه جهات یکسان بوده و تغییر نمی کند.

239

یادآوری: معادلات ناویه استوکس

با اعمال این فرضیات، معادلات اندازه حرکت به شکل زیر به دست می آیند:

■ در جهت x

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

■ در جهت y

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

■ در جهت z

$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

240

یادآوری: معادلات ناویه استوکس

■ در صورتی که سیال تراکم ناپذیر با ویسکوزیته ثابت باشد:

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$

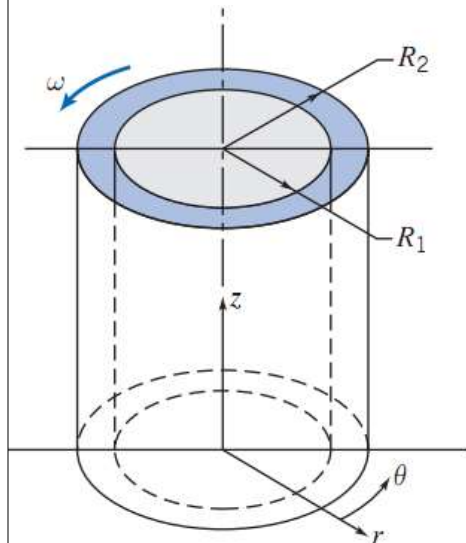
$$\rho \frac{DV_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

■ معادلات بالا، معادلات ناویه استوکس نام دارند و به شکل برداری زیر نشان داده می شوند:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

241

مثال



یک سیال ویسکوز فضای بین دو استوانه هم محور را پر کرده است. استوانه داخلی ثابت بوده و استوانه بیرونی با سرعت ثابت ω می چرخد. جریان سیال نیز آرام است. با استفاده از معادلات پیوستگی و اندازه حرکت، رابطه ای برای توزیع سرعت سیال به دست آورید.

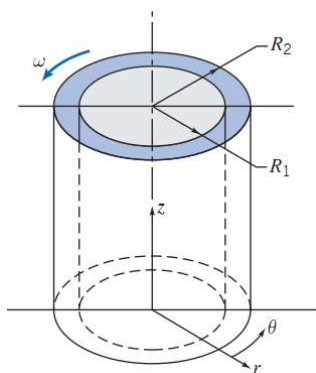
حل: جریان آرام و حرکت فقط در جهت θ می باشد.

در نتیجه: $g_r = g_\theta = 0$ and $g_z = -g$

فرضیات:

- (1) Steady flow; angular speed of outer cylinder is constant.
- (2) Incompressible flow; $\rho = \text{constant}$.
- (3) No flow or variation of properties in the z direction; $v_z = 0$ and $\partial/\partial z = 0$.
- (4) Circumferentially symmetric flow, so properties do not vary with θ , so $\partial/\partial \theta = 0$.

242



با این فرضیات، معادلات به فرم زیر ساده می شوند:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0$$

معادله پیوستگی (مختصات استوانه ای)

معادله اندازه حرکت در بُعد r:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ &= \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_r] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

معادله اندازه حرکت در بُعد theta:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ &= \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_\theta] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

معادله اندازه حرکت در بُعد z:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} \\ & \tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

از معادله پیوستگی ساده شده داریم $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0$

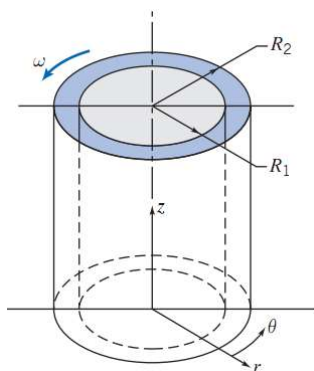
سوال: از این معادله در خصوص v_r چه نتیجه ای می توان گرفت؟؟؟

با توجه به این نتیجه که در تمام مقادیر r مقدار v_r برابر با صفر است، روابط به دست آمده از معادلات اندازه حرکت در جهت و ساده تر می شوند (اعمال فرض ۵ در روابط).

معادله ساده شده اندازه حرکت در جهت θ :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv_\theta] \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rv_\theta] = c_1 \Rightarrow \frac{d}{dr} [rv_\theta] = c_1 r$$

$$\Rightarrow rv_\theta = c_1 \frac{r^2}{2} + c_2 \quad \text{or} \quad v_\theta = c_1 \frac{r}{2} + c_2 \frac{1}{r}$$



با توجه به شکل مساله داریم:

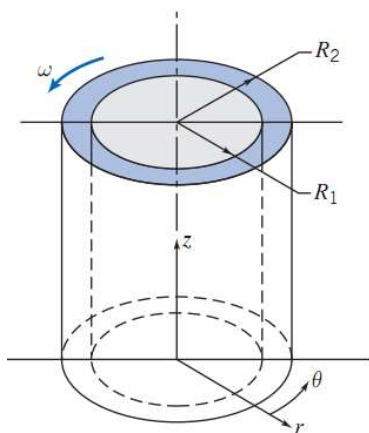
$$\begin{aligned} v_\theta &= \omega R_2 & \text{at} & \quad r = R_2 \\ v_\theta &= 0 & \text{at} & \quad r = R_1 \end{aligned}$$

با اعمال این دو شرط در معادله توزیع سرعت داریم

$$\omega R_2 = c_1 \frac{R_2}{2} + c_2 \frac{1}{R_2} \quad 0 = c_1 \frac{R_1}{2} + c_2 \frac{1}{R_1}$$

دو معادله و دو مجهول c_1 و c_2 داریم:

$$c_1 = \frac{2\omega}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \quad c_2 = \frac{-\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$$



در نهایت با قرار دادن ثوابت c_1 و c_2 در معادله
توزیع سرعت داریم:

$$v_{\theta} = \frac{\omega r}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} - \frac{\omega R_1^2/r}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} = \frac{\omega R_1}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \left[\frac{r}{R_1} - \frac{R_1}{r} \right]$$

فصل چهارم: آنالیز ابعادی و تشابه

مکانیک سیالات در مهندسی شیمی
 دکتر وحید محمودی
 گروه مهندسی شیمی



آنالیز ابعادی

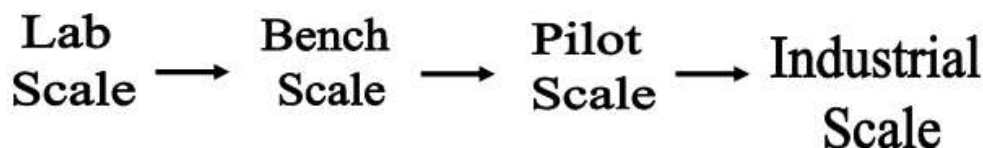


فهرست مطالب

- ❑ مقدمه
- ❑ ضرورت انجام آنالیز ابعادی
- ❑ معرفی ابعاد اصلی
- ❑ تئوری π باکینگهام
- ❑ مراحل روش آنالیز ابعادی
- ❑ مثال نیروی درگ بر روی کره
- ❑ مثال افت فشار سیال در حین عبور از یک شیر نیمه باز
- ❑ مثال لوله موئین افقی
- ❑ مثال سرریز V شکل

مقدمه

- در بسیاری از موارد، مسائل را نمی توان به کمک معادلات حرکت حل کرد.
- در این حالت ها، ناگزیر به انجام آزمایش هستیم و به کمک نتایج آزمایش، رابطه بین متغیرهای موثر بر پدیده را به دست می آوریم.
- از آن جا که آزمایش ها زمان بر و پرهزینه هستند، باید به روشی حداقل تعداد آزمایش های لازم را کاهش دهیم.
- در مرحله بعد، پس از شناسایی عوامل و تعیین رابطه میان متغیرهای موثر، می توانیم مقیاس را از حالت آزمایشگاهی به حالت واقعی تعمیم دهیم.



251

مقدمه

- مراحل شناخت و یا کنترل هر پدیده فیزیکی عبارتست از:
 - ۱- شناسایی متغیرهای موثر بر پدیده
 - ۲- ایجاد ارتباط میان متغیرها با استفاده از قوانین شناخته شده فیزیکی (فرموله کردن)
 - ۳- حل معادلات به دست آمده برای یافتن مجهول های موجود در پدیده
- ❖ همان طور که قبلاً هم اشاره شد، در بسیاری از حالات، انجام این مراحل به سادگی امکان پذیر نیست.

❖ راه حل؟؟؟

✓ خوشبختانه قوانین فیزیکی باید مستقل از سیستم واحدها و ابعاد مورد استفاده باشند. در واقع، طبیعت اهمیتی نمی دهد که ما از چه سیستم ابعادی (SI، انگلیسی یا ...) برای بیان اعداد متغیرها استفاده می کنیم.

✓ به عبارت دیگر، همه معادلات فیزیکی که پدیده های طبیعی را توصیف می کنند باید از نظر ابعادی نیز صحیح باشند.

$$\sum F = ma$$

252

مقدمه

- همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، تمامی جملات یک معادله باید دارای بُعد یکسان باشند، برای مثال در رابطه برنولی:

واحد عبارت ها؟؟؟

- اگر معادله را تقسیم بر یک متغیر طولی کنیم:

$$\frac{P_1}{\rho g Z_1} + \frac{V_1^2}{2gZ_1} + 1 = \left(\frac{V_2^2}{2gZ_2} + \frac{V_2^2}{\rho g Z_2} + 1 \right) \frac{Z_2}{Z_1}$$

- معادله جدید بدون بُعد خواهد بود.
- در آنالیز ابعادی می‌خواهیم متغیرها را طوری با هم ترکیب کنیم که اعداد حاصل بدون بُعد باشند و با اعداد بدون بُعد کار کنیم.

253

مطالعه موردی

- سوال:** چرا در نواحی قطبی موجودات کوچک مانند موش و ... یافت نمی شوند؟
- به دلیل سرمای هوا، موجوداتی که نتوانند گرمای بدن خود را حفظ کنند امکان بقاء در آن مناطق را ندارند.

Heat Loss $\propto$ Surface Area (L^2)

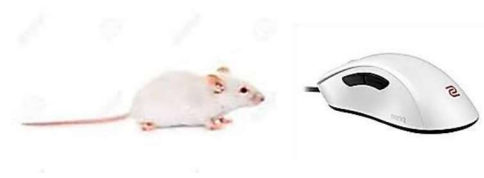
Mass $\propto$ Volume (L^3)

Heat Loss/Mass $\propto$ Area/Volume

$$= L^2 / L^3$$

$$= L^{-1}$$

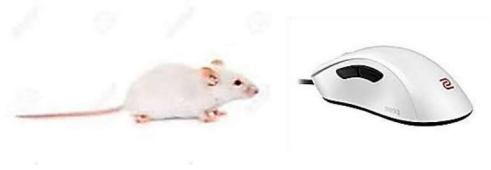
- حال دو مورد متفاوت را مقایسه کنیم:



254

مقاله موردی

$$\begin{aligned}\text{Heat Loss/Mass} &\propto \text{Area/Volume} \\ &= L^2 / L^3 \\ &= L^{-1}\end{aligned}$$



Mouse ($L = 5 \text{ cm}$)
 $1/L = 1/(0.05 \text{ m})$
 $= 20 \text{ m}^{-1}$



Polar Bear ($L = 2 \text{ m}$)
 $1/L = 1/(2 \text{ m})$
 $= 0.5 \text{ m}^{-1}$

255

مقاله موردی



■ یا مثالی دیگر

- ابعاد گالیور ۱۲ برابر موجودات ریز بود. آن ها چند برابر غذای خود باید به او می دادند. ۱۲ برابر؟؟؟
- غذای موردنیاز یک انسان متناسب با جرم (حجم) بدن اوست که این با مکعب طول نسبت دارد.

$$\begin{aligned}L_G &= 12 L_L \quad V_G \propto (L_G)^3 \text{ and } V_L \propto (L_L)^3 \\ V_G / V_L &= (L_G)^3 / (L_L)^3 \\ &= (12 L_L)^3 / (L_L)^3 \\ &= 12^3 \\ &= 1728\end{aligned}$$



256

T. Rex



Tyrannosaurus rex. (California Academy of Sciences)

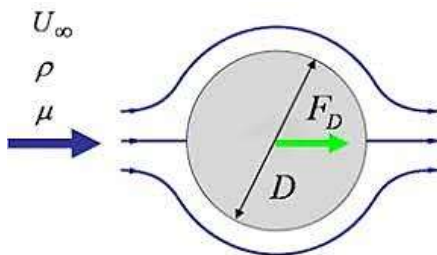
Dimensional analysis, the main topic of this chapter, is used in many scientific pursuits. It has even been used by Professor Alexander McNeil, now at Heriot-Watt

University in Scotland, to try to determine the speed at which dinosaurs such as *Tyrannosaurus rex* may have been able to run. The only data available on these creatures are in the fossil record—the most pertinent data being the dinosaurs' average leg length l and stride s . Could these data be used to extract the dinosaurs' speed? Comparing data on l and s and the speed V of quadrupeds (e.g., horses, dogs) and bipeds (e.g., humans) does not indicate a pattern, unless dimensional analysis is used to learn that all of the data should be plotted in the following way: Plot the dimensionless quantity V^2/gl (where V is the measured speed of the animal and g is the acceleration of gravity) against the dimensionless ratio s/l . When this is done, “magically” the data for most animals fall approximately on one curve! Hence, the running behavior of most animals can be obtained from the graph: In this case, the dinosaurs' value of s/l allows a corresponding value of V^2/gl to be interpolated from the curve, leading to an estimate for V of dinosaurs (because l and g are known). Based on this, in contrast to the *Jurassic Park* movies, it seems likely that humans could easily outrun *T. rex*!

ضرورت آنالیز ابعادی

- در مطالعات سیستم های مختلف اغلب لازم است که اطلاعاتی در مورد اجسامی که بسیار بزرگ هستند بدست آوریم. در این صورت اگر بخواهیم روی مدل اصلی کار کنیم، هم کار مشکل می شود و هم هزینه زیادی در بر دارد. بجای آن می توان از مدل های کوچک تر در مقیاس آزمایشگاهی استفاده نمود و با استفاده از تشابه و اعداد بدون بعد نتایج را به مدل بزرگ تعمیم داد.

- فرض کنید می خواهیم نیروی خارجی وارد بر یک کره صلب را بررسی کنیم:

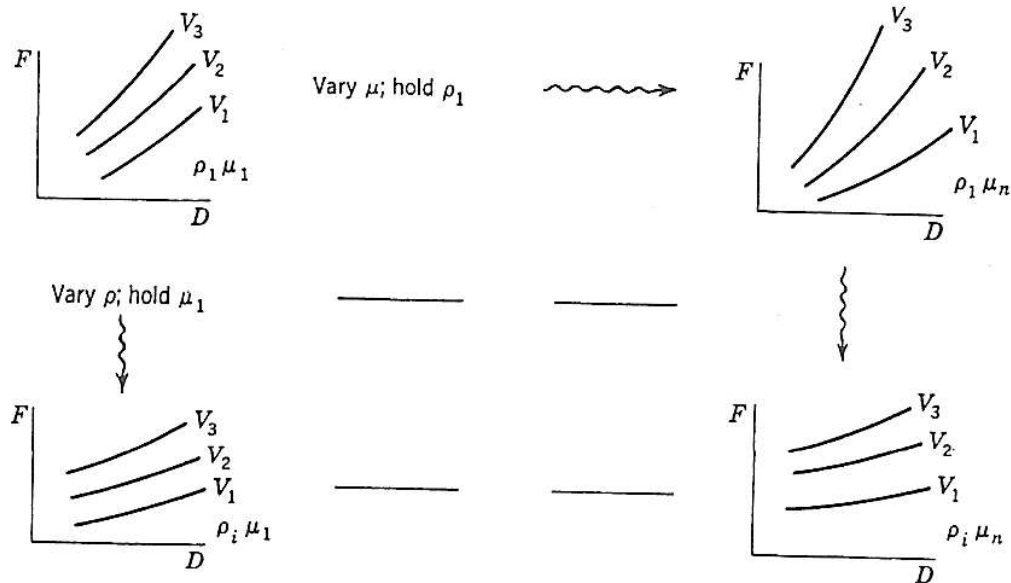


نشان داده شده است که:

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

ضرورت آنالیز ابعادی

- اگر بخواهیم به روش تک متغیره آزمایش هایی را برای تعیین f انجام دهیم باید اثر همه متغیرها را ثابت نگاه داشته و تاثیر تغییرات یک متغیر را بر روی نیرو بررسی کنیم:

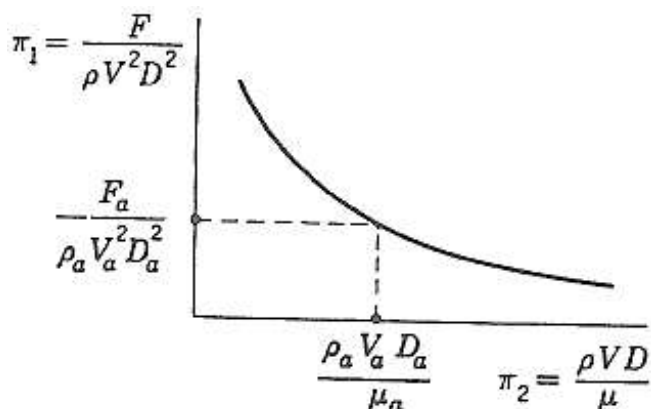


259

ضرورت آنالیز ابعادی

- حالا بجای این کار فرض کنید که پارامترها را طوری با هم ترکیب کنیم که اعداد بدون بعد بوجود بیاورند و سپس، تغییرات اعداد بدون بُعد نسبت به هم را مورد آزمایش قرار دهیم. قطعاً تعداد آزمایش ها به طرز شگفت آوری کاهش خواهد یافت.

- مثلاً در این مثال:



260

ابعاد اصلی

▪ همه مقادیری که ما با آن سرو کار داریم، ترکیبی از ابعاد طول- زمان- جرم و نیرو هستند و اینها با قانون دوم نیوتن به یکدیگر مربوط می شوند:

$$\sum F = ma \Rightarrow F = M \frac{L}{T^2}$$

▪ F ، L و T ابعاد نیرو، جرم، طول و زمان هستند. اگر ما سه تا از این ابعاد را اصلی در نظر بگیریم، چهارمی برحسب سه تای دیگر مشخص می شود. برای مثال، سیستم $M-L-T$ (زمان-طول-جرم) را انتخاب کرده و نیرو را از روی آن تعریف می کنیم.

▪ ابعاد دیگری هم هستند که در صورتی که نیروهای الکترومغناطیسی یا گرادیان دما را در نظر بگیریم، ظاهر می شوند (در این درس بررسی نمی شوند).

▪ تنها در حالتی که جریان تراکم پذیر (گازها) داشته باشیم، با توجه به قانون گاز ایده آل دما مطرح می شود:

$$P = \rho RT \Rightarrow [RT] = [P / \rho]$$

$$= \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{ML/T^2}{L^2} \frac{L^3}{M} = \frac{L^3}{T^2}$$

261

ابعاد اصلی

کمیت	نشانه	بعد	کمیت	نشانه	بعد
طول	l	L	شدت جریان جرمی	m	M/T
زمان	t	T	فشار- تنش	P, τ	M/LT^2
جرم	m	M	چگالی	ρ	M/L^3
نیرو	F	ML/T^2	ویسکوزیته	μ	M/LT
سرعت	V	L/T	ویسکوزیته سینماتیک	ν	L^2/T
شتاب	a	L/T^2	کار	W	ML^2/T^2
سطح	A	L^2	توان- شدت جریان گرمایی	Q, W	ML^2/T^3
شدت جریان حجمی	Q	L^3/T	کشش سطحی	σ	M^2/T
			ضریب کشسانی	B	M/LT^2

262

تئوری II- باکینگهام

■ اگر در یک مدل n متغیر داشته باشیم:

$$X_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

متغیر تابع
متغیرهای مستقل

■ اگر در این مسئله m بُعد اصلی وجود داشته باشد، در این صورت می توان تابع f را برحسب $n-m$ پارامتر بدون بُعد بیان کرد:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$$

■ در واقع تعداد گروه های مستقل بدون بُعد برابر است با $n-m$.

263

مراحل روش آنالیز ابعادی

■ (۱) رابطه را به صورت تابعی از یک متغیر وابسته برحسب $n-1$ متغیر مستقل می نویسیم.

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

متغیر وابسته

D, V, ρ و μ متغیرهای مستقل. پس ۵ متغیر داریم ($n=5$).

■ (۲) تعداد ابعاد اصلی به کار رفته در متغیرها را تعیین می کنیم:

کمیت	نشانه	بعد
طول	l	L
زمان	t	T
جرم	m	M
نیرو	F	ML/T^2
سرعت	V	L/T

ابعاد اصلی عبارتند از L, T و M

پس تعداد ابعاد اصلی (m) برابر با ۳ است.

$$n - m = 5 - 3 = 2$$

264

مراحل روش آنالیز ابعادی

۳) رابطه را بر حسب n-m متغیر بدون بُعد می نویسیم.

تعداد گروه های بدون بُعد مستقل، ۲ می باشد.

$$\pi_2 = f(\pi_1)$$

۴) برای تعیین گروه های بدون بُعد، n-m گروه بدون بُعد را به صورت حاصل ضرب متغیرهای تکرار شونده (به تعداد m) و یکی دیگر از متغیرهای باقیمانده می نویسیم. متغیرهای تکرار شونده را هم به توان می رسانیم.

نکته: متغیرهای تکرار شونده باید به گونه ای انتخاب شوند که با یکدیگر گروه بدون بُعد تشکیل ندهند. متغیرهای تکرار شونده فرضی: ρ, V, D

$$\pi_1 = (D)^x (V)^y (\rho)^z \mu \quad \pi_2 = (D)^x (V)^y (\rho)^z F$$

265

مراحل روش آنالیز ابعادی

۵) برای هر گروه بدون بُعد، توان های M و L و T را برابر با صفر قرار داده و توان های مجهول را به دست می آوریم.

برای π_1 : $\pi_1 = (D)^x (V)^y (\rho)^z \mu \rightarrow [M^0 L^0 T^0] = (L)^x (LT^{-1})^y (ML^{-3})^z ML^{-1} T^{-1}$

برای π_2 : $\pi_2 = (D)^x (V)^y (\rho)^z F \rightarrow [M^0 L^0 T^0] = (L)^x (LT^{-1})^y (ML^{-3})^z ML T^{-2}$

۶) توان های مجهول را با حل دستگاه های معادلات به دست می آوریم. برای π_1 :

$$\begin{cases} L: x + y - 3z - 1 = 0 \\ M: z + 1 = 0 \\ T: -y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 ; y = -1 ; z = -1$$

$$\Rightarrow \pi_1 = D^{-1} \cdot V^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re}$$

266

مراحل روش آنالیز ابعادی

■ به همین ترتیب برای π_2 :

$$\pi_2 = (D)^x (V)^y (\rho)^z F \rightarrow [M^0 L^0 T^0] = (L)^x (LT^{-1})^y (ML^{-3})^z MLT^{-2}$$

$$\begin{cases} L: x + y - 3z + 1 = 0 \\ M: z + 1 = 0 \\ T: -y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 ; y = -2 ; z = -1$$

$$\Rightarrow \pi_2 = D^{-2} \cdot V^{-2} \cdot \rho^{-1} \cdot F = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

■ می توان به جای معکوس رینولدز، خود رینولدز را در نظر گرفت (نسبت به هم مستقل نیستند).

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = f(\text{Re})$$

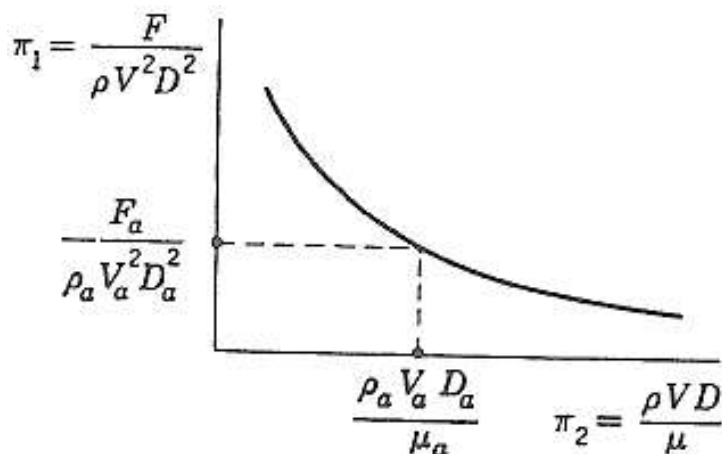
■ در نتیجه

□ نکته: می توان گروه های بدون بُعد را در هم ضرب، تقسیم و یا در یک عدد ثابت ضرب کرد (گروه بدون بُعد به دست آمده، مستقل از گروه های قبلی نخواهد بود).

267

مراحل روش آنالیز ابعادی

■ در نتیجه می توان گفت به جای بررسی تک تک متغیرها، می توان گروه های بدون بُعد را نسبت به هم مورد بررسی قرار داده و در نهایت، با تعداد کمتری آزمایش، تابعیت متغیرها نسبت به یکدیگر را به دست آورد.

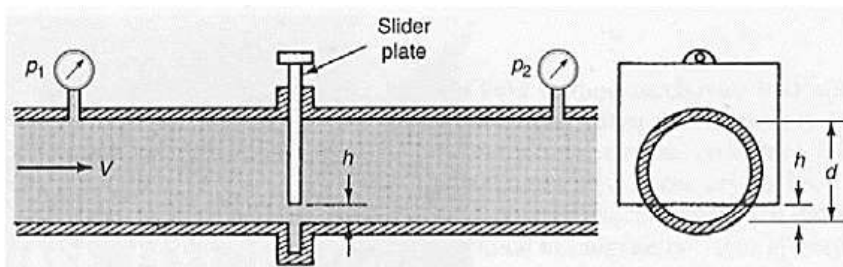


$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = f(\text{Re})$$

268

مثال

■ می خواهیم افت فشار سیال در حین عبور از یک شیر نیمه باز را مورد بررسی قرار دهیم:



نشان داده شده است که

$$\Delta P = f(V, \rho, \mu, d, h)$$

به کمک آنالیز ابعادی، فرم معادله افت فشار سیال را به دست آورید.

حل: تعداد متغیرها برابر با $n=6$ می باشد.

برای تعیین تعداد ابعاد اصلی، بهتر است جدولی شامل متغیرها و ابعاد آن ها تهیه کنیم.

269

حل

■ جدول به فرم مقابل خواهد بود:

متغیر	ابعاد
ΔP	$ML^{-1}T^{-2}$
V	LT^{-1}
ρ	ML^{-3}
μ	$ML^{-1}T^{-1}$
D	L
h	L

$$m = 3$$

در نتیجه:

پس تعداد گروه های بدون بُعد مستقل برابر با ۳ خواهد بود.

با دقت در متغیرها در می یابیم که یکی از گروه های بدون

بُعد همان خواهد بود. در نتیجه:

در مرحله بعد، باید متغیرهای تکرار شونده را انتخاب کنیم که عبارتند از ρ ، V و D .

270

■ حال باید ابعاد اصلی را نوشته و توان ها را برابر با صفر قرار دهیم:

$$\pi_1 = \rho^{x_1} V^{y_1} D^{z_1} \Delta P \Rightarrow [M^0 L^0 T^0] = [ML^{-3}]^{x_1} [LT^{-1}]^{y_1} [L]^{z_1} [ML^{-1} T^{-2}]$$

در نتیجه با مساوی قرار دادن توان های طرفین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M: x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ L: -3x_1 + y_1 + z_1 - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \\ T: -y_1 - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$$

به همین ترتیب برای π_3 خواهیم داشت:

$$\pi_3 = \rho^{x_2} V^{y_2} D^{z_2} \mu \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re}$$

$$x_2 = -1 ; y_2 = -1 ; z_2 = -1$$

با در نظر گرفتن Re به جای معکوسش و نوشتن رابطه بر حسب اعداد بدون بُعد داریم:

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho V^2} = f \left(\frac{h}{D}, \frac{\mu}{\rho V D} \right) \Rightarrow \Delta P = \rho V^2 f \left(\frac{h}{D}, \frac{\mu}{\rho V D} \right)$$

■ دبی خروجی از یک لوله موئین افقی به افت فشار به ازای واحد طول لوله، قطر لوله و ویسکوزیته سیال بستگی دارد. معادله مربوط به دبی خروجی را با استفاده از آنالیز ابعادی به دست آورید.

■ حل: با توجه به صورت مسأله:

$$Q = f \left(\frac{\Delta P}{l}, D, \mu \right)$$

در نتیجه $n =$ خواهد بود.

با تشکیل جدول مربوط به متغیرها و

ابعاد اصلی خواهیم داشت:

متغیر	ابعاد
$\Delta P / l$	$ML^{-2}T^{-2}$
D	L
Q	$L^3 T^{-1}$
μ	$ML^{-1} T^{-1}$

$$m = 3$$

■ حال باید متغیرهای تکرار شونده را تعیین کنیم که عبارتند از Q ، D و $\Delta P/L$:

در نتیجه خواهیم داشت:

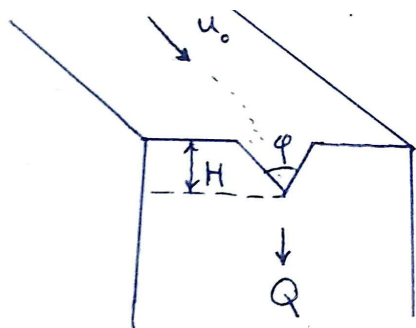
با مساوی قرار دادن توان های طرفین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M: y + 1 = 0 \Rightarrow y = \\ L: 3x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow z = \\ T: -x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow x = \end{cases}$$

در نهایت می توان نوشت:

مثال

■ شکل زیر نشان دهنده یک سرریز V شکل می باشد. سرریز به صورت صفحه ای عمود بر مسیر جریان بوده و در آن، یک شکاف به شکل V ایجاد شده است. زاویه شکاف ϕ نام دارد. دبی حجمی خروجی از سرریز تابعی از ارتفاع مایع از انتهای شکاف و زاویه آن است. به علاوه، دبی حجمی به شتاب ثقل و سرعت سیال نیز وابسته است. با استفاده از آنالیز ابعادی، فرم معادله دبی خروجی را به دست آورید.



■ حل: با توجه به صورت مسأله:

$$Q = f(H, \phi, g, u_0)$$

پس تعداد متغیرها برابر با $n=5$ است.

برای تعیین m ، جدول متغیرها و ابعاد را تشکیل

می دهیم.

▪ جدول به فرم مقابل خواهد بود.

متغیر	ابعاد
Q	$L^3 T^{-1}$
u_0	LT^{-1}
φ	---
g	LT^{-2}
H	L

در نتیجه:

پس تعداد گروه های بدون بُعد مستقل برابر با خواهد بود.

با دقت در متغیرها در می یابیم که یکی از گروه های بدون

بُعد خواهد بود. در نتیجه:

در مرحله بعد، باید متغیرهای تکرار شونده را انتخاب کنیم که عبارتند از H و g .

▪ حال باید ابعاد اصلی را نوشته و توان ها را برابر با صفر قرار دهیم:

در نتیجه با مساوی قرار دادن توان های طرفین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} L: x_1 + y_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \\ T: -2y_1 - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = \end{cases}$$

به همین ترتیب برای π_3 خواهیم داشت:

$$\pi_3 = H^{x_2} g^{y_2} u_0$$

$$x_2 = \quad ; \quad y_2 =$$

اعداد بدون بُعد مهم در سیالات

$$Eu = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} \quad \text{عدد اویلر}$$

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad \text{عدد رینولدز}$$

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}} \quad \text{عدد فراود}$$

$$M = \frac{v}{c} \quad \text{عدد ماخ}$$

$$We = \frac{v^2 \rho l}{\sigma} \quad \text{عدد وبر}$$

هر کدام از این اعداد نسبت دو نیرو هستند.

277

اعداد بدون بُعد مهم در سیالات

این نیروها عبارتند از:

$$F_p = \Delta p A \cong \Delta p l^2 \quad \text{نیروی فشاری}$$

$$F_I = \frac{mv \cdot dv}{dx} = \rho v^2 l^2 \quad \text{نیروی اینرسی}$$

$$F_\mu = \tau A = \mu \frac{dv}{dy} \cdot A = \nu l \mu \quad \text{نیروی ویسکوز}$$

$$F_g = mg = \rho l^3 \cdot g \quad \text{نیروی جاذبه}$$

$$F_B = BA = \rho c^2 l^2 \quad \text{نیروی تراکم پذیری}$$

$$F_\sigma = \sigma l \quad \text{نیروی کشش سطحی}$$

278

اعداد بدون بُعد مهم در سیالات

بنابراین:

وقتی افت فشار مهم باشد:

$$Eu = \frac{\text{نیروی فشاری}}{\text{نیروی اینرسی}} \quad Eu = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} \quad (\text{اغلب جریان ها})$$

جریان هایی که نیروی ویسکوزیته در آنها مهم باشد:

$$Re = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} \quad Re = \frac{\rho v l}{\mu} \quad (\text{جریان های داخلی - لایه مرزی})$$

جریان هایی که تحت تأثیر نیروی جاذبه باشند:

$$Fr = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی جاذبه}} \quad Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}} \quad (\text{جریان های سطح آزاد})$$

279

اعداد بدون بُعد مهم در سیالات

جریان هایی که تراکم پذیری در آنها مهم باشد.

($v > 0.3c$)

$$M = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی تراکم پذیری}} \quad M = \frac{v}{c}$$

جریان هایی که تحت تأثیر نیروی کشش سطحی باشند.

(جریان در سطح تماس)

$$We = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}} \quad We = \frac{v^2 \rho l}{\sigma}$$

280



تشابه (Similitude)



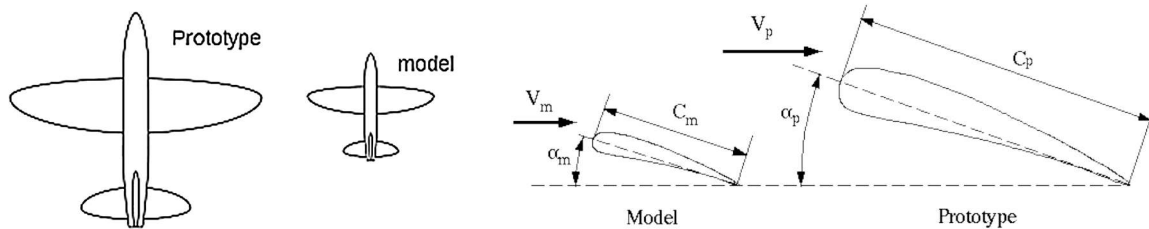
مقدمه

آنالیز ابعادی اهدافی را دنبال می کند که عبارتند از:

- ایجاد گروه های بدون بُعد که به طراحی آزمایش ها (فیزیکی یا عددی) و گزارش نتایج آزمایشگاهی کمک می کنند.
 - یافتن قوانین مقیاس، به گونه ای که به کمک این قوانین بتوان عملکرد نمونه اصلی را از روی رفتار مدل پیش بینی کرد.
 - به دست آوردن معادلاتی که بتوانند ارتباط صحیح بین پارامترها را نشان دهند.
- برای برقراری تشابه کامل میان یک مدل و نمونه اصلی سه شرط اساسی لازم است که عبارتند از تشابه هندسی (Geometric similarity)، تشابه سینماتیکی (Kinematic similarity) و تشابه دینامیکی (Dynamic similarity).

تشابه

- هرگاه نتوانیم معادلات را به صورت تحلیلی یا عددی حل کنیم و یا نمونه اصلی (Prototype) خیلی بزرگ باشد، باید از نمونه اصلی یک مدل کوچک تر (Model) تهیه کرده و روابط ساده تری را به کار گرفت تا بتوانیم اثر پارامترهای مهم را تعیین کنیم.



- اگر بخواهیم روی مدل کار کنیم و نتایج را به مقیاس اصلی تعمیم دهیم، باید مطمئن بود که مقادیر اندازه گیری شده روی مدل را می توان استفاده کرد و مقادیر متناظر با آن را روی مقیاس اصلی پیش بینی نمود. در این صورت مدل اصلی و مدل آزمایشگاهی باید تشابه هندسی، تشابه سینماتیک و تشابه دینامیک داشته باشند.

283

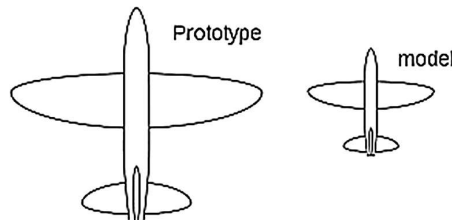
تشابه

- اگر نسبت ابعاد در مدل و نمونه اصلی (در نقاط مختلف) مقدار ثابتی داشته باشد، آنگاه تشابه هندسی بین مدل و نمونه اصلی برقرار است. این نسبت را ضریب مقیاس (L_r) می نامند.

$$\frac{L_m}{L_p} = L_r$$

$$\frac{A_m}{A_p} = L_r^2$$

$$\frac{V_m}{V_p} = L_r^3$$



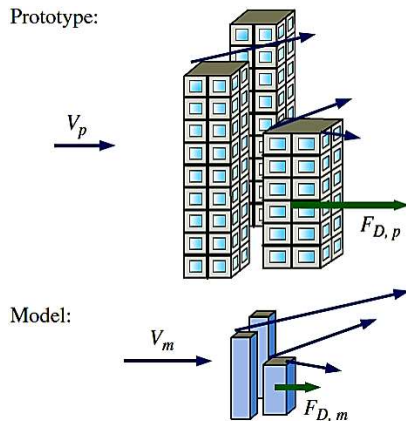
- اگر نسبت سرعت سیال در مدل به سرعت سیال در نمونه اصلی در نقاط متناظر یکسان بوده و بردارهای سرعت در این نقاط، هم جهت باشند بین مدل و نمونه اصلی تشابه سینماتیکی برقرار است.

- اگر دو سیستم از لحاظ سینماتیکی مشابه باشند، از لحاظ هندسی نیز تشابه دارند.

284

تشابه

▪ لازمه تشابه سینماتیکی بین مدل و نمونه اصلی، یکسان بودن نوع جریان بین مدل و نمونه اصلی است.



▪ برای برقراری تشابه دینامیکی بین مدل و نمونه اصلی، لازم است در نقاط متناظر، نیروهای مشابه دارای راستا و جهت یکسان بوده و نسبت این نیروها با یک ضریب ثابت به هم مربوط باشند.

$$\frac{(F_I)_1}{(F_I)_2} = \frac{(F_p)_1}{(F_p)_2} = \frac{(F_\mu)_1}{(F_\mu)_2} = \frac{(F_g)_1}{(F_g)_2} = cte$$

285

تشابه

▪ در نتیجه می توان گفت:

$$\frac{(F_I)_1}{(F_p)_1} = \frac{(F_I)_2}{(F_p)_2} \quad \frac{(F_I)_1}{(F_\mu)_1} = \frac{(F_I)_2}{(F_\mu)_2} \quad \frac{(F_I)_1}{(F_g)_1} = \frac{(F_I)_2}{(F_g)_2}$$

▪ و یا به عبارت دیگر:

$$Eu_1 = Eu_2 \quad Re_1 = Re_2 \quad Fr_1 = Fr_2$$

▪ فرض کنید رابطه بین نیروها در یک سیستم به شکل زیر باشد:

$$F_I = f(F_p, F_\mu, F_g)$$

▪ در نتیجه می توان با استفاده از آنالیز ابعادی نوشت:

$$Eu = f(Re, Fr)$$

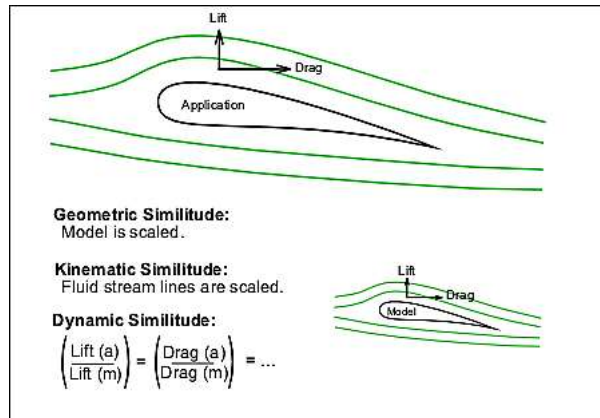
▪ بنابراین می توان گفت که اگر عدد رینولدز و عدد فراود در مدل و نمونه اصلی با هم یکسان باشند، آنگاه عدد اولر نیز در مدل و نمونه اصلی یکسان خواهد بود.

286

تشابه

■ پس به طور کلی می توان گفت برای آنکه تشابه کامل بین مدل و نمونه اصلی برقرار باشد باید:

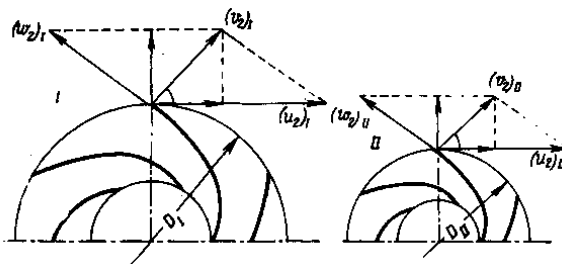
- تشابه هندسی داشته باشیم.
- تشابه سینماتیکی داشته باشیم.
- تشابه دینامیکی (در مورد اعداد بدون بعد مؤثر در فرآیند) داشته باشیم.



287

مثال

■ یک پمپ صنعتی سانتریفیوژ باید به گونه ای طراحی شود که فشار جریان آبی با شدت $1/5 \text{ m}^3/\text{s}$ را به مقدار 400 kPa افزایش دهد. قطر پروانه پمپ برابر با 40 cm می باشد. برای مطالعه رفتار این پمپ از یک مدل آزمایشگاهی با قطر پروانه 8 cm استفاده می شود. مایع مورد استفاده در آزمایشگاه همان آب است. تعیین کنید برای آن که بتوان نتایج آزمایش را به نمونه اصلی تعمیم داد چه شدت جریانی از آب و چه اختلاف فشاری در مدل باید به کار ببریم؟



■ حل: طبق نتایج حاصل از تشابه دینامیکی

می توان نوشت:

$$Re_1 = Re_2$$

$$\frac{V_1 d_1}{\mu_1} = \frac{V_2 d_2}{\mu_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{0.4}{0.08} = 5$$

288

حل

■ برای تعیین شدت جریان داریم:

$$Q = VA$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V_2 D_2^2}{V_1 D_1^2} = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_1}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

■ برای تعیین اختلاف فشار در مدل نیز باید از تساوی عدد بدون بُعد مربوط به فشار استفاده کنیم:

$$Eu_1 = Eu_2$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho V^2}\right)_1 = \left(\frac{\Delta P}{\rho V^2}\right)_2 \Rightarrow \Delta P_2 = \Delta P_1 \frac{V_2^2}{V_1^2} = 400 \times 5^2 = 10000 \text{ KPa}$$

289

مثال

■ قرار است بر مبنای داده های آزمایشگاهی حاصل از تونل باد، نیروی درگ وارد بر یک تبدیل کننده صوتی که به شکل یک کره است، پیش بینی و تعیین گردد. نمونه اصلی با قطر ۱ ft با سرعت ۵ گره دریایی (مایل دریایی بر ساعت) در آب دریا با دمای ۴۰ °F حرکت کند. مدل تولید شده از این تبدیل کننده دارای قطری برابر با ۶ in. است. سرعت مورد نیاز در آزمایش را برای هوا تعیین کنید. اگر نیروی درگ وارد بر مدل برابر با ۰/۶ lbf باشد، نیروی درگ وارد بر نمونه اصلی را تعیین کنید.



■ حل: طبق نتایج حاصل از آنالیز ابعادی برای نیروی درگ وارد بر یک کره در سیال داشتیم:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

290

حل

▪ با توجه به برقرای تشابه دینامیکی بین مدل و نمونه اصلی می توان نوشت:

$$Re_{\text{model}} = Re_{\text{prototype}}$$

□ For seawater at 40 °F, $\rho=1.99 \text{ slug/ft}^3$ and $\nu=1.69 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}$

▪ با تبدیل واحد برای سرعت نمونه اصلی می توان نوشت:

$$V_p = 5 \frac{\text{nmi}}{\text{hr}} \times 6080 \frac{\text{ft}}{\text{nmi}} \times \frac{\text{hr}}{3600 \text{ s}} = 8.44 \text{ ft/s}$$

▪ در نتیجه

$$Re_p = \frac{V_p D_p}{\nu_p} = 8.44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \times 1 \text{ ft} \times \frac{\text{s}}{1.69 \times 10^{-5} \text{ ft}^2} = 4.99 \times 10^5$$

291

حل

▪ با توجه به تساوی بین اعداد رینولدز، برای مدل می توان نوشت:

$$Re_m = \frac{V_m D_m}{\nu_m} = 4.99 \times 10^5$$

▪ برای هوا در شرایط استاندارد داریم:

□ $\rho= 0.00238 \text{ slug/ft}^3$ and $\nu=1.57 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{s}$

▪ در نتیجه

$$V_m = Re_m \frac{\nu_m}{D_m} = 4.99 \times 10^5 \times 1.57 \times 10^{-4} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}} \times \frac{1}{0.5 \text{ ft}} = 157 \text{ ft/s}$$

▪ برای تعیین نیروی درگ وارد بر نمونه اصلی باید از تساوی ضرایب بدون بُعد درگ استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2} \right)_m &= \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2} \right)_p \Rightarrow F_p = F_m \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{V_p^2}{V_m^2} \frac{D_p^2}{D_m^2} \\ &= 0.60 \text{ lbf} \times \frac{1.99}{0.00238} \times \frac{(8.44)^2}{(157)^2} \times \frac{1}{(0.5)^2} \end{aligned}$$

$$F_p = 5.8 \text{ lbf}$$

292

مثال

▪ اگر عدد فراود (Fr) برای مدل و نمونه اصلی یکسان باشد، نسبت های سرعت، زمان و دبی حجمی را برای مدل و نمونه اصلی بیابید.

حل: می دانیم

$$Fr = \left(\frac{g D}{u^2} \right)$$

در صورت داشتن تشابه بین مدل و نمونه اصلی می توان گفت

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \left(\frac{g D}{u^2} \right)_m = \left(\frac{g D}{u^2} \right)_p \Rightarrow \frac{D_m}{D_p} = \left(\frac{u_m}{u_p} \right)^2 = L_r \Rightarrow \frac{u_m}{u_p} = \sqrt{L_r}$$

$$\Rightarrow \frac{L_m/t_m}{L_p/t_p} = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{L_m}{L_p} \times \frac{t_p}{t_m} = \sqrt{L_r} \Rightarrow L_r \times \frac{t_p}{t_m} = \sqrt{L_r} \Rightarrow \frac{t_m}{t_p} = \sqrt{L_r}$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{u_m}{u_p} \times \frac{A_m}{A_p} = \sqrt{L_r} \times L_r^2 = L_r^{2.5}$$

293

تمرین

▪ یک بالون بزرگ با سرعت ۵ m/s در هوای آزاد با دمای ۲۰ °C حرکت می کند. مدل این بالون با نسبت مقیاس ۰/۰۵ در آب با دمای ۲۰ °C آزمایش می شود. سرعت آب در آزمایش مدل را تعیین کنید. اگر نیروی درگ وارد بر مدل برابر با ۵ kN باشد، نیروی درگ موثر وارد بر نمونه اصلی را تعیین کنید. داده های مساله عبارتند از:

$$\rho_{Air} = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_{Air} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{sec}$$

$$\rho_w = 998 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_w = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{sec}$$

294

 Any Question?

